MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Omtentamen
torsdag 22 augusti 2022
14:00 – 18:00

TMV206 Linjär Algebra, våren 2022

Hjälpmedel: Penna, suddgummi, linjal och pennvässare

Tentan har åtta frågor och 47 poäng. Fullständiga lösningar ska lämnas in. Endast svar ger inga poäng. Motivera och förklara så väl du kan.
Betygsgränser (inkl. bonus): 3:a: 20–31 poäng, 4:a: 32–41 poäng, 5:a: 42–50 poäng

Lösningsförslag publiceras på kurshemsidan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden tydligt på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt. Resultatet meddelas i Ladok.

OBS: Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida). Numrera de inlämnade bladen efter att du sorterat dem! Använd inte röd penna!

Fråga 1. **(a)** Hitta samtliga lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{aligned} y + z &= 0, \\ -x - 2z &= 2, \\ x + y &= 1. \end{aligned}$$

(b) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Hitta samtliga lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)

Fråga 2. Låt L vara linjen i planet som beskrivs av

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 - 3t, \end{cases}$$

och låt $P = (1, 1)$.

(a) Beräkna avståndet från punkten P till linjen L. (3p)

(b) Vilken punkt på linjen L är närmast punkten P? (3p)

Fråga 3. Låt $\mathbf{u} = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ och $\mathbf{w} = (1, 0, 3)$.

(a) Beräkna volymen av den parallelepiped som spänns upp av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. (2p)

(b) Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (3p)

(c) Bestäm en nollskild vektor som är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (2p)

Fråga 4.

(a) Låt $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ och låt T vara den linjära avbildning som ges av $T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Beräkna matrisen för den linjära avbildningen T. (3p)

(b) Låt $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$. Låt vidare S vara den linjära avbildning som uppfyller att

$$S(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad S(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad S(\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna matrisen för den linjära avbildningen S. (5p)

Fråga 5. Låt

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Beräkna inversen av B. (6p)

Fråga 6. Låt

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

vara tre vektorer i $\mathbf{R}^3$.

(a) Visa att vektorerna $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ utgör en bas för $\mathbf{R}^3$. (3p)

(b) Låt $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen

$$A_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen för L i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. (6p)

Fråga 7. Beräkna samtliga egenvärden samt egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(7p)