Tentamen SSY043
Signaler och System, Z2

Lösningsförslag

30 augusti 2024 kl. 14:00-18.00

1. (a) (1) Frekvenssvar $H_1(s)|_{s=j\omega}$ och $|H_1(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(b-\omega^2)^2+(a\omega)^2}}$
För låga ω : $|H_1(j\omega)| \approx \frac{\omega^2}{b}$ Beloppet stiger med ω^2.
För höga ω : $|H_1(j\omega)| \approx \frac{\omega^2}{a\omega^2}$ En konstant.
Stämmer med Bode C.
(2) $H_2(s)|_{s=j\omega}$ och $|H_2(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2+c^2)(\omega^2+d^2)}}$
För låga ω : $|H_2(j\omega)| \approx \frac{\omega}{cd}$ Beloppet stiger med ω.
För höga ω : $|H(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega}$ Beloppet faller med ω.
Stämmer med Bode B.
(3) Laplacetransformera. $H_3(s) = \mathcal{L}\{h_3(t)\} = \frac{1}{s+k}$ och
$H_3(j\omega) = \frac{1}{k+j\omega}$ med $|H_3(j\omega| = \frac{1}{\sqrt{(k^2+\omega^2)}}$
För låga ω : $|H_3(j\omega)| \approx \frac{1}{k}$ En konstant.
För höga ω : $|H(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega}$ Beloppet faller med ω.
Stämmer med Bode A.

(b) Ingen aliasing. En reell sinusformad sinal ger två 'toppar' i $|X[k]|$ (vid k och $N-k$).
Vi ser 'toppar' vid $k_1 = 16$ och $N - k_1 = 64 - 16 = 48$ och
$k_2 = 26$ och $N - k_2 = 64 - 26 = 38$
Beräknade frekvenser bli

$$f_1 = \frac{k_1}{N} f_s = \frac{16}{64} 1200 = 300 \text{ Hz}$$
$$f_2 = \frac{k_2}{N} f_s = \frac{26}{64} 1200 = 487.5 \text{ Hz}$$

Notera dock frekvensupplösningen $\triangle f = \frac{f_s}{N} = \frac{1200}{64} = 18.75$ Hz.

2. (a)
Beräkna poler till $H(s)$.
$s^2 + 0.8s + 0.12 = (s + 0.6)(s + 0.2)$.
Överföringsfunktionen blir (med PBU)

$$H(s) = \frac{9s + 3.8}{s^2 + 0.8s + 0.12} = \frac{9s + 3.8}{(s + 0.6)(s + 0.2)} = \frac{A}{s + 0.6} + \frac{B}{s + 0.2}$$

$$9s + 3.8 = A(s + 0.2) + B(s + 0.6)$$

$$\boxed{\text{s = -0.2}} : 9(-0.2) + 3.8 = B(-0.2 + 0.6) \;\Rightarrow\; B = \cdots = 5$$

$$\boxed{\text{s = -0.6}} : 9(-0.6) + 3.8 = A(-0.6 + 0.2) \;\Rightarrow\; A = \cdots = 4$$

$$H(s) = \frac{4}{s + 0.6} + \frac{5}{s + 0.2}$$

Invers transform ger impulssvaret

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \left(4\,e^{-0.6\,t} + 5\,e^{-0.2\,t}\right) u(t)$$

(b)
Stegsvar $y_s(t) = \int_0^t h(t)dt = \left[4\,\frac{e^{-0.6\,t}}{-0.6} + 5\,\frac{e^{-0.2\,t}}{-0.2}\right]_0^t$

$$y_s(t)|_{t\to\infty} = 0 + 0 - \frac{4}{-0.6} - \frac{5}{-0.2} = 31.7$$

Alternativt kan slutvärdessatsen användas.
Stegsvarets transform $Y_s(s) = \frac{1}{s}H(s)$ och

$$y_s(t)|_{t\to\infty} = \lim|_{s\to 0}\{s \cdot Y(s)\} = \frac{4}{0.6} + \frac{5}{0.2} = 31.7$$

3. z-transformera ! $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$

$$\begin{aligned} H(z) &= z\left(\frac{2}{z-0.4}+\frac{3}{z-0.1}\right) = \\ &= z\left(\frac{2(z-0.1)+3(z-0.4)}{(z-0.4)(z-0.1)}\right) = \frac{z(5z-1.4)}{(z-0.4)(z-0.1)} \end{aligned}$$

$x[n] = 5(0.2)^n u[n]$ ger $X(z) = 5\,\frac{z}{z-0.2}$. Utsignalens z-transform blir

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{5z^2(5z-1.4)}{(z-0.4)(z-0.1)(z-0.2)}$$

Förbered inverstransformering med PBU av (spara undan ett z)

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{5z(5z-1.4)}{(z-0.4)(z-0.1)(z-0.2)} = \frac{A}{z-0.4}+\frac{B}{z-0.1}+\frac{C}{z-0.2}$$

$$5z(5z-1.4) = A(z-0.1)(z-0.2)+B(z-0.4)(z-0.2)+C(z-0.4)(z-0.1)$$

$$\begin{aligned} &\boxed{\text{z=0.4}} : 2(2-1.4) = A(0.4-0.1)(0.4-0.2) \;\Rightarrow\; A = 20 \\ &\boxed{\text{z=0.1}} : 0.5(0.5-1.4) = B(0.1-0.4)(0.1-0.2) \;\Rightarrow\; B = -15 \\ &\boxed{\text{z=0.2}} : (1-1.4) = C(0.2-0.4)(0.2-0.1) \;\Rightarrow\; C = 20 \end{aligned}$$

Vi får

$$Y(z) = \frac{20\,z}{z-0.4} - \frac{15\,z}{z-0.1} + \frac{20\,z}{z-0.2}$$

Invers z-transform ger utsignalen

$$y[n] = (20\,(0.4)^n - 15\,(0.1)^n + 20\,(0.2)^n)\,u[n]$$

4. Laplacetransformera differentialekvation och insignal

$$
\begin{aligned}
&y(t) + \frac{1}{4}\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \\
&Y(s) + \frac{1}{4}sY(s) = X(s) \quad \text{som ger överföringsfunktionen} \\
&H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{s+4}
\end{aligned}
$$

Beräkna systemets utsignal $y(t)$ då insignalen är

$$x(t) = \left(e^{-2t}\cos(6t)\right)u(t) \xrightarrow{\text{Laplacetransform}} X(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+6^2}$$

Utsignalens transform (komplexa poler, behåll 2:a grads polynomet) med PBU

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{4}{s+4}\cdot\frac{s+2}{(s^2+4s+40)} = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs+C}{(s^2+4s+40)}$$

$$4s+8 = A(s^2+4s+40)+(Bs+C)(s+4) = A(s^2+4s+40)+s^2B+s(4B+C)+4C$$

$$
\begin{aligned}
&\boxed{s^2:} \quad 0 = A+B, \qquad A = -B \\
&\boxed{s^1:} \quad 4 = 4A+4B+C, \quad C = 4 \\
&\boxed{s^0:} \quad 8 = 40A+4C, \qquad 8 = 40A+4\cdot 4 \Rightarrow A = -0.2 = -B
\end{aligned}
$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{-0.2}{s+4} + \frac{0.2s+4}{(s+2)^2+6^2} = \frac{-0.2}{s+4} + \frac{0.2(s+20)}{(s+2)^2+6^2} = \\
&= \frac{-0.2}{s+4} + \frac{0.2(s+2+18)}{(s+2)^2+6^2} = \\
&= \frac{-0.2}{s+4} + \frac{0.2(s+2)}{(s+2)^2+6^2} + \frac{0.2\cdot 18}{(s+2)^2+6^2} = \\
&= \frac{-0.2}{s+4} + \frac{0.2(s+2)}{(s+2)^2+6^2} + \frac{0.2\cdot 18}{6}\cdot\frac{6}{(s+2)^2+6^2}
\end{aligned}
$$

Invers Laplacetransform ger utsignalen

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left(-0.2\,e^{-4\,t} + 0.2\,e^{-2\,t}\cos(6t) + 0.6\,e^{-2\,t}\sin(6t)\right)u(t)$$

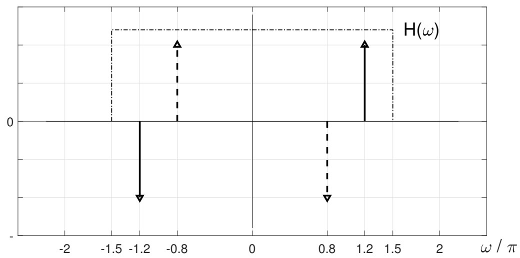
5. Impulståg $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Sampelintervall $T = 1$.
Samplingsvinkelfrekvensen $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$.
Fouriertransformera $p(t)$.
$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\,2\pi)$.
Signal $x(t) = \sin(\frac{6\pi}{5}t) = \sin(\omega_o t)$. Fouriertransformera
$X(j\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_o) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_o)$ (se figur 2).

$$y(t) = x(t)p(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = Y(j\omega)$$

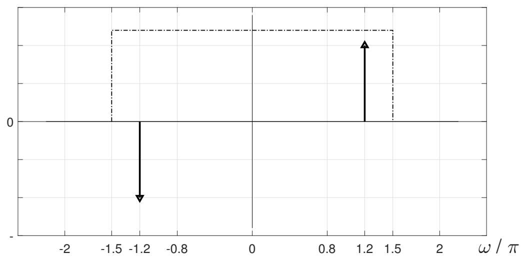
$X(j\omega)$ faltas med alla 'impulser' i $P(j\omega)$.
$X(j\omega)$ upprepas längs ω-axeln i steg om $\omega_s = 2\pi$ enligt

$$Y(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\,\omega_s)) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\,2\pi))$$

De 'impulser' i $Y(j\omega)$ som faller innanför $H(j\omega)$ visas i figur 1.
Bidrag endast för $k = -1, 0, 1$. Notera aliasing.



Figur 1: Filter $H(\omega)$ samt $\hat{Y}(j\omega)$



Figur 2: Transformen $X(j\omega)$

Transformen av filtrets utsignal är

$$\hat{Y}(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{\pi}{j} \left[\delta(\omega - \omega_o) - \delta(\omega + \omega_o) - \delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)\right]$$

där $T = 1$, $\omega_o = \frac{6\pi}{5}$ och $\omega_1 = \omega_s - \omega_o = 2\pi - \frac{6\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$.

Och utsignalen blir

$$\hat{y}(t) = \sin(\omega_o t) - \sin(\omega_1 t) = \sin(\frac{6\pi}{5}t) - \sin(\frac{4\pi}{5}t)$$