

Tentamen SSY042
Signaler och System, Z2

Lösningsförslag

18 mars 2021 kl. 14:00-18.00

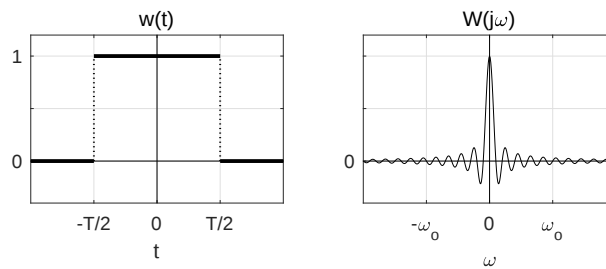
1. (a)(i) Fouriertransformera.

$$x(t) = \cos(\omega_o t) \longleftrightarrow X(j\omega) = \pi (\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o))$$

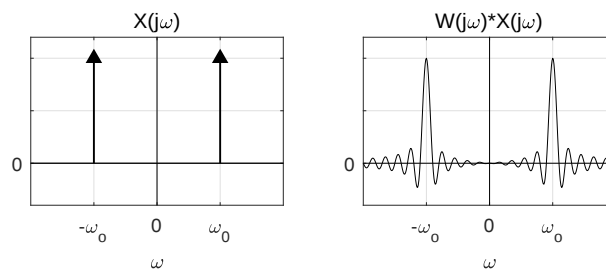
$$w(t) = \text{rect}(T) = u(t + \frac{T}{2}) - u(t - \frac{T}{2}) \longleftrightarrow W(j\omega) = \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega}{2}}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = w(t) x(t) &\longleftrightarrow \hat{X}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} W(j\omega) * X(j\omega) = \\ &= \frac{1}{2} (X(j(\omega - \omega_o)) + X(j(\omega + \omega_o))) = \\ &= \frac{\sin((\omega - \omega_o)T/2)}{\omega - \omega_o} + \frac{\sin((\omega + \omega_o)T/2)}{\omega + \omega_o} \end{aligned}$$

(ii) Figurer (Första positiva nollgenomgång hos $W(j\omega)$ är vid $\omega = \frac{2\pi}{T}$)



Figur 1: Tidsfönster $w(t)$ med Fouriertransform $W(j\omega)$



Figur 2: Fouriertransformerna $X(j\omega)$
samt $\hat{X}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} W(j\omega) * X(j\omega)$

(b) Index k anger vinkelfrekvens $k\omega_o$ samt amplitud på sinussignal a_k . Studera signalernas utseende och deras variation över tid.

FS1: Höga amplituder vid höga frekvenser, $k = 8 \dots 10$, $\rightarrow x_2(t)$

FS2: Höga amplituder vid mellanhöga frekvenser, $k = 4 \dots 6$, $\rightarrow x_1(t)$

FS3: Höga amplituder vid låga frekvenser, $k = 1 \dots 3$, $\rightarrow x_3(t)$

2. Laplacetransformera $g(t) \longleftrightarrow G(s)$.

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{1}{4} (10t - 3(1 - e^{-2t})) u(t) = \\
 &= \frac{1}{4} (10t - 3 + 3e^{-2t}) u(t) \\
 G(s) &= \frac{1}{4} \left(\frac{10}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{3}{s+2} \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{10(s+2) - 3s(s+2) + 3s^2}{s^2(s+2)} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{4s+20}{s^2(s+2)} \right) = \\
 &= \frac{s+5}{s^2(s+2)} = \frac{1}{s} \cdot H(s)
 \end{aligned}$$

Stegsvar ger $G(s) = \frac{1}{s} \cdot H(s)$ ty insignal $x(t) = u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$.

$$H(s) = \frac{s+5}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \dots = \frac{2.5}{s} - \frac{1.5}{s+2}$$

(a) Impulssvar $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (2.5 - 1.5e^{-2t})u(t)$

(b) Systemet ej stabilt ty

- Krav att $h(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ ej uppfyllt.
- Alla poler till $H(s)$ ligger ej i vänstra halvplanet.

3.

$$y[n] = \frac{1}{5} (x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4])$$

 z -transformera

$$Y(z) = \frac{1}{5} X(z) (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{5} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4})$$

Studera frekvenssvaret: $z = e^{j\Omega}$

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{5} (1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega} + e^{-j4\Omega}) = \\ &= \frac{1}{5} e^{-j2\Omega} (e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}) = \\ &= \frac{1}{5} e^{-j2\Omega} \left(1 + 2 \frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2} + 2 \frac{e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{5} e^{-j2\Omega} (1 + 2 \cos(\Omega) + 2 \cos(2\Omega)) = \end{aligned}$$

$$x[n] = 1 + 3 \cos\left(\frac{4\pi}{10}n\right) + 2 \cos\left(\frac{6\pi}{10}n\right), \quad \forall n.$$

Frekvenssvar:

$$\begin{aligned} \Omega = 0; \quad H(e^{j \cdot 0}) &= \frac{1}{5}(1 + 2 + 2) = 1 \\ \Omega = \frac{4\pi}{10}; \quad H(e^{j \cdot \frac{4\pi}{10}}) &= \dots = 0 \\ \Omega = \frac{6\pi}{10}; \quad H(e^{j \cdot \frac{6\pi}{10}}) &= \dots = -0.2472 e^{-j \cdot \frac{2 \cdot 6\pi}{10}} \end{aligned}$$

Summera de tre bidragen i $x[n]$ vid $\Omega = 0$, $\frac{4\pi}{10}$ och $\frac{6\pi}{10}$.

$$y[n] = 1 - 2 \cdot 0.2472 \cos\left(\frac{6\pi}{10}n - 2 \frac{6\pi}{10}\right) = 1 - 0.494 \cos\left(\frac{6\pi}{10}(n-2)\right)$$

4. z -transformera

$$y[n] - 0.8y[n-1] + 0.64y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

$$Y(z)(1 - 0.8z^{-1} + 0.64z^{-2}) = X(z)(1 + z^{-1})$$

och

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.64z^{-2}} =$$

$$= \frac{z^2 + z}{z^2 - 0.8z + 0.64}$$

$H(z)$ har komplexa poler $p_{1,2} = 0.4 \pm j0.7$ med $|p_{1,2}| = 0.8$. Behåll nämnarpolynomet och matcha mot följande z -transformer

$$a^n \cos(\Omega n) u[n] \longleftrightarrow \frac{z(z - a \cos \Omega)}{z^2 - z 2a \cos \Omega + a^2}$$

$$a^n \sin(\Omega n) u[n] \longleftrightarrow \frac{z a \sin \Omega}{z^2 - z 2a \cos \Omega + a^2}$$

Alltså: $a^2 = 0.64$ ger $a = 0.8$.

$2a \cos \Omega = 0.8$ ger $\cos \Omega = 0.5$ och $\Omega = \pi/3$.

Täljaren: $z(z + 1) = z(z - a \cos \Omega + a \cos \Omega + 1) =$
 $z(z - a \cos \Omega) + z(a \cos \Omega + 1)$ med $a \cos \Omega = 0.4$ och

$a \sin \Omega = 0.8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.4\sqrt{3}$. Det blir

$$H(z) = \frac{z(z - a \cos \Omega)}{z^2 - z 2a \cos \Omega + a^2} + \frac{1 + a \cos \Omega}{a \sin \Omega} \cdot \frac{z a \sin \Omega}{z^2 - z 2a \cos \Omega + a^2} =$$

$$= \frac{z(z - 0.4)}{z^2 - z 0.8 + 0.64} + \frac{1.4}{0.4\sqrt{3}} \cdot \frac{z 0.4\sqrt{3}}{z^2 - z 0.8 + 0.64}$$

(a) Impulssvar

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = 0.8^n \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \frac{7}{2\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right) u[n]$$

(b) Systemet stabilt ty poler $|p_{1,2}| = 0.8$ innanför enhetscirkeln.

Kontroll av täljaren:

$$z(z - 0.4) + 1.4z = z^2 - 0.4z + 1.4z = z^2 + z = z(z + 1) \text{ Ok!}$$

5. Laplacetransformera

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4y(t) &= \frac{7}{5} x(t) - \frac{3}{5} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \\ Y(s)(s^2 + 4) &= X(s) \left(\frac{7}{5} - s \frac{3}{5} + s^2 \right) \\ H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{s^2 - s \frac{3}{5} + \frac{7}{5}}{s^2 + 4}\end{aligned}$$

Insignal

$$x(t) = 5 e^{-t} u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{5}{s+1}$$

$$\begin{aligned}Y(s) = X(s)H(s) &= \frac{5}{s+1} \cdot \frac{(s^2 - s \frac{3}{5} + \frac{7}{5})}{s^2 + 4} = \frac{5s^2 - 3s + 7}{(s+1)(s^2 + 4)} = \\ &= \{PBU\} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \quad \text{beräkna } A, B \text{ och } C\end{aligned}$$

$$5s^2 - 3s + 7 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s + 1) = As^2 + 4A + s^2B + s(B + C) + C$$

Tre ekvationer, tre obekanta:

$$\begin{aligned}s^2 &: 5 = A + B \\ s^1 &: -3 = B + C \\ s^0 &: 7 = 4A + C\end{aligned}$$

Lösningen blir: $A = 3$, $B = 2$ och $C = -5$.

$$Y(s) = \frac{3}{s+1} + 2 \frac{s}{s^2+4} - \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left(3 e^{-t} + 2 \cos(2t) - \frac{5}{2} \sin(2t) \right) u(t)$$