

1 Uppgift 1

Uppgift: Beräkna följande integraler:

$$(a) \int_0^\pi \sin x e^{-\cos x} dx \quad (b) \int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x(1+x^2)} dx \quad (c) \int_1^e x \ln(x^2) dx$$

Lösning:

$$a) \int_0^\pi \sin x e^{-\cos x} dx = \left[\begin{array}{l} t = -\cos x \\ dt = \sin x dx \end{array} \right] = \int_{-1}^1 e^t dt = \left[e^t \right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$$

Integralen i b) är generaliserad eftersom integranden enbart är kontinuerlig på $(0, 1]$. Eftersom

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{x + (1+x^2)}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx = \arctan x + \ln|x| + C = F(x) + C$$

och

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\underbrace{\arctan x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\ln|x|}_{\rightarrow -\infty}) \quad \nexists$$

är integralen divergent.

$$\begin{aligned} c) \int_1^e x \ln(x^2) dx &= \int_1^e 2x \ln x dx \stackrel{PI}{=} [x^2 \ln x]_1^e - \int_1^e x dx = \left[x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \right]_1^e = \left[\frac{x^2}{2} (2 \ln x - 1) \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} (2 - 1) - \frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{e^2 + 1}{2} \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} a) \int_0^\pi \sin x e^{-\cos x} dx &= e - \frac{1}{e} \\ b) \int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x(1+x^2)} dx &\text{ är divergent} \\ c) \int_1^e x \ln(x^2) dx &= \frac{e^2 + 1}{2} \end{aligned}$$

2 Uppgift 2

Uppgift: Bestäm en geometrisk talföljd $a_1, a_2, \dots$ sådan att $\sum_{k=1}^\infty a_k = 10$.

Lösning: Elementen i en geometrisk talföljd ges av $a_k = a_1 q^{k-1}$ där q är talföljdens kvot. För att en geometrisk serie $\sum_{k=1}^\infty a_k$ ska vara konvergent krävs att $-1 < q < 1$, och då ges dess summa av

$$\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k=1}^\infty a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Den sökta serien ska alltså ha a_1 och $-1 < q < 1$ sådana att

$$\frac{a_1}{1-q} = 10.$$

T.ex. kan vi välja $q = 1/2$,

$$\Rightarrow 10 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-1/2} = 2a_1 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 5.$$

Svar: Den geometriska talföljden $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \dots$ har $\sum_{k=1}^\infty a_k = 10$.

3 Uppgift 3

Uppgift: Ställ upp en Riemannsumma som approximerar arean som motsvarar $\int_0^3 (6-2x)dx$ via en uppdelning i n stycken delintervall, och beräkna summan samt gränsvärdet som ger den bestämda integralen.

Lösning: Vi delar upp intervallet $[0, 3]$ via $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 3$ och sätter $x_k = \frac{3k}{n}$ så att $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$. Riemannsumman kan då skrivas som

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

där $f(x) = 6 - 2x$ och $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Vi sätter¹ $\xi_k = x_k$ och får

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{3k}{n}\right) \frac{3}{n} = \sum_{k=1}^n \left(6 - \frac{6k}{n}\right) \frac{3}{n} = \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Detta är en aritmetisk summa över de n första termerna i en talföljd $(a_k)_{k=1}^n$ där

$$a_k = a_1 + (k-1)d = 1 - \frac{k}{n}$$

Alltså gäller

$$\frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n a_k = [\text{aritmetisk summa}] = \frac{18}{n} n \frac{a_1 + a_n}{2} = 9(a_1 + a_n) = 9\left(1 - \frac{1}{n} + 0\right) = 9 - \frac{9}{n}$$

Svar:

$$\sum_{k=1}^n \left(6 - \frac{6k}{n}\right) \frac{3}{n} = 9 - \frac{9}{n} \rightarrow 9 + 0 = 9 \quad \text{då} \quad n \rightarrow \infty.$$

4 Uppgift 4

Uppgift: Lös följande differentialekvationer:

(a) $y(x)y'(x) + xy^2(x) = x$

(b) $\begin{cases} y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\ y(1) = -\pi/4 \end{cases}$

(c) $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 2e^{2x}$

Lösning:

Uppgift a):

$$y(x)y'(x) + xy^2(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad yy' = x(1 - y^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{yy'}{y^2 - 1} = -x$$

är en separabel differentialekvation. Vi har

$$\frac{y}{y^2 - 1} \frac{dy}{dx} = -x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{y^2 - 1} dy = -x dx$$

Integration av båda led ger

$$\begin{aligned} \underbrace{\int (-x) dx}_{= -\frac{x^2}{2} + C} &= \int \frac{y}{y^2 - 1} dy = [f(y) = y^2 - 1] = \frac{1}{2} \int \frac{f'(y)}{f(y)} dy = \frac{1}{2} \ln |f(y)| + D = [f(y) = y^2 - 1] = \frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| + D \\ &\Leftrightarrow \ln |y^2 - 1| = -x^2 + E \quad \Leftrightarrow \quad |y^2 - 1| = e^{-x^2 + E} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 1 = F e^{-x^2}, \quad F \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{1 + F e^{-x^2}} \end{aligned}$$

¹Det går lika bra att t.ex. sätta $\xi_k = x_{k-1}$.

Via insättning i differentialekvationen syns även att $y(x) = 1$, dvs. lösningen med $F = 0$, är en lösning.

$$\Rightarrow y(x) = \sqrt{1 + Fe^{-x^2}}, \quad \text{om } Fe^{-x^2} \geq -1.$$

Uppgift b):

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplicera båda led med den integrerande faktorn $e^{2 \ln |x|} = x^2$. Då har vi

$$\frac{d}{dx}(yx^2) = y'x^2 + 2xy = x^2 \left(y' + \frac{2}{x}y \right) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Integration av VL och HL m.a.p. x ger då

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}(yx^2) dx &= \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &\Leftrightarrow x^2 y = x - \arctan x + C \quad \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{x} + \frac{C - \arctan x}{x^2} \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = -\pi/4$ ger villkoret

$$y(1) = 1 + C - \pi/4 = -\pi/4 \quad \Leftrightarrow \quad C = -1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x} - \frac{1 + \arctan x}{x^2}$$

Uppgift c):

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 2e^{2x} \quad (4.1)$$

är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karaktäristiska ekvationen till differentialekvationen ges av

$$P(r) = r^2 - 4r + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 4r = -5 \quad \Leftrightarrow \quad (r-2)^2 = 4 - 5 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \pm i$$

och har två komplexa rötter $r_{\pm} = 2 \pm i$. Den allmänna lösningen till den homogena motsvarigheten till (4.1) ges därför av

$$y_h(x) = e^{2x}(A \cos x + B \sin x)$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(x)$ till den inhomogena differentialekvationen (4.1) baserat på HL i (4.1). Eftersom sagda högerled består av $2e^{2x}$ ansätter vi:

$$y_p(x) = De^{2x}$$

där D är en konstant. Vi har

$$y_p'(x) = 2De^{2x} \quad y_p''(x) = 4De^{2x}$$

och insättning av y_p i ekvationen (4.1) ger

$$\begin{aligned} 4De^{2x} - 8De^{2x} + 5De^{2x} &= 2e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad De^{2x} = 2e^{2x} \quad \stackrel{e^{2x} \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad D = 2 \\ &\Rightarrow \quad y_p(x) = 2e^{2x}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till (4.1) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{2x}(A \cos x + B \sin x + 2)$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Svar:

$$\text{a) } y(x) = \sqrt{1 + Fe^{-x^2}} \quad \text{b) } y(x) = \frac{1}{x} - \frac{1 + \arctan x}{x^2} \quad \text{c) } y(x) = e^{2x}(A \cos x + B \sin x + 2)$$

5 Uppgift 5

Uppgift: Låt D vara området i xy -planet som begränsas av graferna till $f(x) = x^2$ och $g(x) = |x|$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring x -axeln.

Lösning: $D_f = D_g = \mathbb{R}$. För att avgöra inom vilket intervall (i x) som graferna begränsar ett område i xy -planet söker vi skärningspunkterna mellan graferna,

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow |x| = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x^2 \\ x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$$

Vi har tre skärningspunkter, $x \in \{-1, 0, 1\}$. Området D begränsas därför av graferna till $f(x), g(x)$ samt av linjerna $x = -1$ och $x = 1$. Eftersom $g(x) \geq f(x)$ då $x \in [-1, 1]$ ges volymen av den kropp som fås då D roteras kring x -axeln via metoden med cirkelskivor av

$$\begin{aligned} V &= V_g - V_f = \pi \int_{-1}^1 (g(x))^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= [\text{jämn integrand}] = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 0 = \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

Svar: $V = \frac{4\pi}{15}$.

6 Uppgift 6

En kopp varm choklad ställs på ett bord. Då kommer den varma chokladen att svalna med en hastighet som är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan vätskan och omgivningen. Under antagandet att koppen med den varma chokladen höll en temperatur om 90°C till att börja med, och att omgivningen håller 20°C , bestäm ett uttryck för temperaturen av den varma chokladen genom att lösa en lämplig differentialekvation. Ange även vilka värden proportionalitetskonstanten kan anta.

Lösning: Låt $y(t)$ beskriva temperaturen (i $^\circ\text{C}$) som en funktion av tiden. Det aktuella begynnelsevärdeproblemet ges av

$$\begin{cases} y'(t) = -k(y(t) - 20) \\ y(0) = 90 \end{cases}$$

där $k > 0$ är en konstant. Vi har att

$$y' + ky = 20k$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen, vars integrerande faktor ges av e^{kt} . Vi multiplicerar differentialekvationen med den integrerande faktorn och får

$$\frac{d}{dt}(ye^{kt}) = y'e^{kt} + yke^{kt} = 20ke^{kt}$$

Integration av båda led ger

$$\int \frac{d}{dt}(ye^{kt}) dt = \int 20ke^{kt} dt \Leftrightarrow ye^{kt} = 20e^{kt} + C \Leftrightarrow y(t) = 20 + Ce^{-kt}$$

Begynnelsevillkoret ger därefter att

$$y(0) = 20 + C = 90 \Leftrightarrow C = 70 \Rightarrow y(t) = 20 + 70e^{-kt}$$

Svar: Temperaturen (i $^\circ\text{C}$) som funktion av tiden ges av $y(t) = 20 + 70e^{-kt}$, med $k > 0$ för att temperaturen ska minska som en funktion av tiden.