

Tentamen
MVE740, Matematik, del D
2025-06-04, 14.00–18.00

Telefonvakt: Jenny Larsson, 031-7724641.

Hjälpmedel: Inga.

Betygsgränser (inklusive bonuspoäng): 3:a: 20-27 poäng, 4:a: 28-34 poäng, 5:a: 35-40 poäng.

Resultatet meddelas i LADOK.

OBS! Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida). Numrera de inlämnade bladen *efter* att du har sorterat dem! Använd inte röd penna!

1. Beräkna följande integraler:

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{x + x^2}{x^3 + x} dx \qquad (b) \int_1^\infty \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} dx \qquad (9p)$$

2. Betrakta följande geometriska serie:

$$3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots$$

Skriv serien med summabeteckning och beräkna summan av serien. (3p)

3. Ställ upp en Riemannsumma som approximerar arean som motsvarar $\int_0^2 (2-x)dx$ via en uppdelning i n stycken delintervall, och beräkna summan samt gränsvärdet som ger den bestämda integralen. (5p)

4. Lös följande differentialekvationer:

$$(a) \quad y'(x) = 2x^3 - 2xy(x) \qquad (3p)$$

$$(b) \quad y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 10 \sin x \qquad (3p)$$

$$(c) \quad \begin{cases} y'(x) - 2xy^2(x) = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (3p)$$

5. Beräkna arean av det område som begränsas av graferna till $f(x) = 4(x-2)$ och $g(x) = x^3 - 8$. (4p)

6. För en svängande (matematisk) pendel gäller att om $y(t)$ är vinkeln från jämviktsläget som funktion av tiden, så är vinkelaccelerationen proportionell mot $\sin y$, med en negativ proportionalitetskonstant, så att pendeln accelereras tillbaka mot jämviktsläget. För små pendelutslag är vinkeln liten, och då kan man hitta en approximativ lösning till $y(t)$ genom att ersätta $\sin y$ med y . Bestäm en sådan approximativ lösning för vinkeln som funktion av tiden genom att lösa en lämplig differentialekvation. Antag att pendeln vid tiden noll passerar jämviktsläget med en vinkelhastighet om π radianer per sekund. Observera att om $y(t)$ anger en vinkel, så är $y'(t)$ en vinkelhastighet och $y''(t)$ en vinkelacceleration. (4p)

7. Bevisa att om serien $\sum_{k=1}^\infty a_k$ är konvergent så gäller det att $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. (3p)

8. Härled lösningsformeln för en linjär differentialekvation av första ordningen, det vill säga av typen $y' + g(x)y = h(x)$. (3p)

Lycka till!