

Tentamen
MVE426/MVE425/MVE640, Matematik, del D
2024-08-23, 14.00–18.00

Telefonvakt: Anna Karlsson, 0721-575850.

Hjälpmedel: Inga.

Betygsgränser (inklusive bonuspoäng): 3:a: 20-27 poäng, 4:a: 28-34 poäng, 5:a: 35-40 poäng.

Resultatet meddelas i LADOK.

OBS! Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida). Numrera de inlämnade bladen *efter* att du har sorterat dem! Använd inte röd penna!

1. Beräkna följande integraler:

$$(a) \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \quad (b) \int_0^e \ln(x+1) dx \quad (c) \int \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} dx \quad (9p)$$

2. För den aritmetiska talföljden $a_1, a_2, \dots$ är $a_1 = 20$ och $a_2 = 14$. Bestäm talföljdens differens och beräkna

$$\sum_{k=1}^{41} a_k \quad (3p)$$

3. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{k} - \frac{2k}{k-1} \right) = \frac{2}{n} - 2n$$

för alla heltal $n \geq 2$. (5p)

4. Lös följande differentialekvationer:

$$(a) \begin{cases} y'(x)e^{y(x)} = 2x(1 + e^{y(x)}) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (3p)$$

$$(b) \quad 2y''(x) - 8y'(x) + 8y(x) = 5 \cos x \quad (3p)$$

$$(c) \quad y'(x) + \cos(x)y(x) = \cos(x)\sin(x) \quad (3p)$$

5. Beräkna arean av det område som begränsas av graferna till $f(x) = x^3 - 2x$ och $g(x) = x^2$. (4p)

6. En uppdämd ström trycker mot sina vallar och börjar bryta igenom dem.

Förändringen i flödet genom fördämningen är en summa av tre bidrag: en konstant, en faktor $2te^{-t}$ kubikmeter per sekundkvadrat, där t är tiden i sekunder, och en term proportionell mot själva flödet, med proportionalitetskonstanten -1 . Vid tiden noll finns inget flöde genom fördämningen, och allt eftersom tiden går stabiliserar vattenflödet mot $1 \text{ m}^3/\text{s}$. Bestäm en funktion som beskriver vattenflödet genom fördämningen genom att lösa en lämplig differentialekvation. (4p)

7. Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (3p)

8. Bevisa att om F och G är primitiva funktioner till f , så är $G(x) = F(x) + C$. (3p)

Lycka till!