

1 Uppgift 1

Uppgift: Beräkna följande integraler:

$$(a) \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \quad (b) \int_0^e \ln(x+1) dx \quad (c) \int \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

Lösning:

$$\begin{aligned} a) \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow 2t dt = dx \end{array} \right] = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{1+t} dt = \\ &= 2t - 2 \ln|1+t| + C = [t = \sqrt{x}] = 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \int_0^e \ln(x+1) dx &\stackrel{PI}{=} [(x+1) \ln(x+1)]_0^e - \int_0^e \frac{x+1}{x+1} dx = [(x+1) \ln(x+1)]_0^e - \int_0^e dx = \\ &= [(x+1) \ln(x+1) - x]_0^e = (e+1) \ln(e+1) - e - \ln(1) = \\ &= (e+1) \ln(e+1) - e \end{aligned}$$

För att lösa c) gör vi en partialbråksuppdelning. Vi ansätter en partialbråksuppdelning enligt:

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Likhet mellan VL och HL kräver

$$\begin{aligned} 2x &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) \\ x=1 : \quad 2 &= 2A \quad \Leftrightarrow \quad A=1 \\ x=0 : \quad 0 &= A-C \quad \Leftrightarrow \quad C=A=1 \\ x^2 : \quad 0 &= A+B \quad \Leftrightarrow \quad B=-A=-1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-x+1}{x^2+1} dx = \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x + C \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} a) \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C \\ b) \quad \int_0^e \ln(x+1) dx &= (e+1) \ln(e+1) - e \\ c) \quad \int \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} dx &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x + C \end{aligned}$$

2 Uppgift 2

Uppgift: För den aritmetiska talföljden $a_1, a_2, \dots$ är $a_1 = 20$ och $a_2 = 14$. Bestäm talföljdens differens och beräkna

$$\sum_{k=1}^{41} a_k$$

Lösning: Talföljdens differens d är

$$d = a_2 - a_1 = 14 - 20 = -6.$$

Vi har

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = n \frac{a_1 + a_n}{2} = n \left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right) = \begin{bmatrix} n = 41 \\ d = -6 \\ a_1 = 20 \end{bmatrix} = 41(20 - 20 \cdot 6) = -41 \cdot 20 \cdot 5 = -41 \cdot 100 = -4100$$

Svar: Talföljdens differens är $d = -6$ och summan är -4100 .

3 Uppgift 3

Uppgift: Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{k} - \frac{2k}{k-1} \right) = \frac{2}{n} - 2n$$

för alla heltal $n \geq 2$.

Lösning:

Utsaga: $\sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{k} - \frac{2k}{k-1} \right) = \frac{2}{n} - 2n$ för alla heltal $n \geq 2$.

Bevis:

- Då $n = 2$ gäller att

$$VL = \sum_{k=2}^2 \left(\frac{2}{k} - \frac{2k}{k-1} \right) = \frac{2}{2} - \frac{4}{2-1} = 1 - 4 = -3$$

$$HL = \left(\frac{2}{n} - 2n \right) \Big|_{n=2} = \frac{2}{2} - 4 = -3$$

$VL = HL$. Därmed är utsagan är sann för $n = 2$.

- Antag att

$$\sum_{k=2}^m \left(\frac{2}{k} - \frac{2k}{k-1} \right) = \frac{2}{m} - 2m$$

för något tal $m \geq 2$. Då gäller för $n = m + 1$ att

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m+1} \left(\frac{2}{k} - \frac{2k}{k-1} \right) &= \sum_{k=2}^m \left(\frac{2}{k} - \frac{2k}{k-1} \right) + \frac{2}{m+1} - \frac{2(m+1)}{m} = \frac{2}{m} - 2m + \frac{2}{m+1} - \frac{2(m+1)}{m} = \\ &= \frac{2}{m+1} - 2m + \frac{2}{m} - \frac{2(m+1)}{m} = \frac{2}{m+1} - 2m + \frac{2-2(m+1)}{m} = \\ &= \frac{2}{m+1} - 2m - \frac{2m}{m} = \frac{2}{m+1} - 2m - 2 = \frac{2}{m+1} - 2(m+1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Utsagan är sann för $n = m + 1$.

Induktionsprincipen ger därmed att utsagan är sann för alla heltal $n \geq 2$.

VSV.

4 Uppgift 4

Uppgift: Lös följande differentialekvationer:

- (a) $\begin{cases} y'(x)e^{y(x)} = 2x(1 + e^{y(x)}) \\ y(0) = 0 \end{cases}$
 (b) $2y''(x) - 8y'(x) + 8y(x) = 5 \cos x$
 (c) $y'(x) + \cos(x)y(x) = \cos(x) \sin(x)$

Uppgift a):

$$y'e^y = 2x(1 + e^y) \Leftrightarrow \frac{e^y y'}{1 + e^y} = 2x$$

är en separabel differentialekvation. Vi har

$$\frac{e^y}{1 + e^y} \frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{e^y}{1 + e^y} dy = 2x dx$$

Integration av båda led ger

$$\underbrace{\int 2x dx}_{=x^2+C} = \int \frac{e^y}{1 + e^y} dy = [f(y) = e^y] = \int \frac{f'(y)}{1 + f(y)} dy = \ln |1 + f(y)| + D = [f(y) = e^y] = \ln(1 + e^y) + D$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \ln(1 + e^y) &= x^2 + E \Leftrightarrow 1 + e^y = e^{x^2+E} = Fe^{x^2} \\ \Leftrightarrow e^y &= Fe^{x^2} - 1 \Leftrightarrow y = \ln(Fe^{x^2} - 1) \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger villkoret

$$\begin{aligned} y(0) = \ln(F - 1) &= 0 \Leftrightarrow F - 1 = 1 \Leftrightarrow F = 2 \\ \Rightarrow y(x) &= \ln(2e^{x^2} - 1). \end{aligned}$$

Lösning: Uppgift b):

$$2y''(x) - 8y'(x) + 8y(x) = 5 \cos x \quad (4.1)$$

är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen ges av

$$P(r) = 2r^2 - 8r + 8 = 0 \Leftrightarrow r^2 - 4r = -4 \Leftrightarrow (r - 2)^2 = -4 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

och har en rot $r_{1,2} = 2$ av multiplicitet 2. Den allmänna lösningen till den homogena motsvarigheten till (4.1) ges därför av

$$y_h(x) = (Ax + B)e^{2x}$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(x)$ till den inhomogena differentialekvationen (4.1) baserat på HL i (4.1). Eftersom sagda högerled består av $5 \cos x$ ansätter vi:

$$y_p(x) = D \cos x + E \sin x$$

där D, E är konstanter. Vi har

$$y_p'(x) = -D \sin x + E \cos x \quad y_p''(x) = -D \cos x - E \sin x = -y_p(x)$$

och insättning av y_p i ekvationen (4.1) ger

$$\begin{aligned} -8(-D \sin x + E \cos x) + 6(D \cos x + E \sin x) &= 5 \cos x \\ \Leftrightarrow (8D + 6E) \sin x + (6D - 8E) \cos x &= 5 \cos x \end{aligned}$$

där likhet för alla x kräver

$$\begin{cases} 8D + 6E = 0 \\ 6D - 8E = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = -4D/3 \\ (6 + 32/3)D = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = -4/10 \\ D = 3/10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{10}.$$

Den allmänna lösningen till (4.1) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B)e^{2x} + \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{10}$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Uppgift c):

$$y' + \cos(x)y = \cos(x) \sin(x)$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplicera båda led med den integrerande faktorn $e^{\sin x}$. Då har vi

$$\frac{d}{dx} (ye^{\sin x}) = y'e^{\sin x} + y \cos x e^{\sin x} = e^{\sin x} (y' + \cos(x)y) = e^{\sin x} \cos(x) \sin(x)$$

Integration av VL och HL m.a.p. x ger då

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx} (ye^{\sin x}) dx &= \int e^{\sin x} \sin(x) \cos(x) dx = \left[\frac{t = \sin x}{dt = \cos x dx} \right] = \int te^t dt \stackrel{PI}{=} te^t - \int e^t dt = \\ &= (t - 1)e^t + C = [t = \sin x] = (\sin x - 1)e^{\sin x} + D \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow ye^{\sin x} = (\sin x - 1)e^{\sin x} + C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$$

Svar:

$$\begin{aligned} \text{a) } y(x) &= \ln(2e^{x^2} - 1) & \text{b) } y(x) &= y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B)e^{2x} + \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{10}. \\ \text{c) } y(x) &= \sin x - 1 + Ce^{-\sin x} \end{aligned}$$

5 Uppgift 5

Uppgift: Beräkna arean av det område som begränsas av graferna till $f(x) = x^3 - 2x$ och $g(x) = x^2$.

Lösning: $D_f = D_g = \mathbb{R}$. För att avgöra inom vilket intervall (i x) som graferna begränsar ett område i xy -planet söker vi skärningspunkterna mellan graferna,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x^3 - 2x \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-2) = 0$$

Vi har tre skärningspunkter, $x \in \{-1, 0, 2\}$. Arean begränsas därför av graferna till $f(x), g(x)$ samt av linjerna $x = -1$ och $x = 2$. $f(x) < g(x)$ då $x \in (0, 2)$ och $f(x) > g(x)$ då $x \in (-1, 0)$. Arean av området ges av

$$A = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$$

d.v.s. summan av två delar. Vi har

$$A_1 = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - 2x - x^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{12}$$

$$A_2 = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^2 (x^2 - x^3 + 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 4 + 4 \right) - 0 = \frac{8}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$$

Svar: $A = \frac{37}{12}$.

6 Uppgift 6

En uppdämd ström trycker mot sina vallar och börjar bryta igenom dem. Förändringen i flödet genom fördämningen är en summa av tre bidrag: en konstant, en faktor $2te^{-t}$ kubikmeter per sekundkvadrat, där t är tiden i sekunder, och en term proportionell mot själva flödet, med proportionalitetskonstanten -1 . Vid tiden noll finns inget flöde genom fördämningen, och allt eftersom tiden går stabiliseras vattenflödet mot $1 \text{ m}^3/\text{s}$. Bestäm en funktion som beskriver vattenflödet genom fördämningen genom att lösa en lämplig differentialekvation.

Lösning: Låt $y(t)$ beskriva vattenflödet genom fördämningen (i m^3/s) som en funktion av tiden (i sekunder). Den aktuella differentialekvationen ges av

$$\begin{cases} y'(t) = k + 2te^{-t} - y(t) \\ y(0) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 \end{cases}$$

där k är en konstant. Vi har att

$$y' + y = k + 2te^{-t}$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplikation av båda led med den integrerande faktorn e^t ger

$$\frac{d}{dt}(ye^t) = y'e^t + ye^t = (y' + y)e^t = (k + 2te^{-t})e^t = ke^t + 2t.$$

Integration av båda led m.a.p. t ger

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}(ye^t) dt &= \int (ke^t + 2t) dt \\ \Leftrightarrow ye^t &= ke^t + t^2 + C \quad \Leftrightarrow y(t) = k + (t^2 + C)e^{-t} \end{aligned}$$

där C är en konstant. Villkoret

$$1 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [k + (t^2 + C)e^{-t}] = k \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$$

bestämmer konstanten k , och begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger

$$0 = y(0) = 1 + (0 + C)e^0 = 1 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -1$$

$$\Rightarrow y(t) = 1 + (t^2 - 1)e^{-t}$$

Svar: Vattenflödet genom fördämningen, i m^3/s och vid tiden t sekunder, ges av $y(t) = 1 + (t^2 - 1)e^{-t}$.