

Tentamen
MVE426/MVE425/MVE640, Matematik, del D
2024-05-29, 14.00–18.00

Telefonvakt: Anna Karlsson, 0721-575850.

Hjälpmedel: Inga.

Betygsgränser (inklusive bonuspoäng): 3:a: 20-27 poäng, 4:a: 28-34 poäng, 5:a: 35-40 poäng.

Resultatet meddelas i LADOK.

OBS! Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida). Numrera de inlämnade bladen *efter* att du har sorterat dem! Använd inte röd penna!

1. Beräkna följande integraler:

$$(a) \int \frac{2x}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx \quad (b) \int \cos(x) \sin(x) e^{\cos^2(x)} dx \quad (c) \int_0^1 x \arctan(x) dx \quad (9p)$$

2. För den geometriska talföljden $a_1, a_2, \dots$ är $a_1 = -9$ och $a_2 = 6$. Avgör om serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

är konvergent och bestäm i så fall dess summa. (3p)

3. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=2}^n (3k^2 - 9k + 7) = (n - 1)^3$$

för alla heltal $n \geq 2$. (5p)

4. Lös följande differentialekvationer:

$$(a) \quad 3y''(x) - 12y'(x) - 15y(x) = 9e^{2x} \quad (3p)$$

$$(b) \quad \begin{cases} 3y^2(x)y'(x) = \frac{1+y^3(x)}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (3p)$$

$$(c) \quad y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \sin(x), \quad x > 0 \quad (3p)$$

5. Låt $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ och låt D vara området i xy -planet som begränsas av kurvorna $y = f(x)$, $y = -f(x)$, $x = 1$ och $x = 2$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring y -axeln. (4p)

6. En vikt på 1 kg hänger i en fjäder och guppar upp och ned under inverkan av gravitationskraften och kraften från fjädern. Accelerationen av vikten är då proportionell mot avvikelserna från jämviktsläget, så att vikten accelereras uppåt om den befinner sig nedanför jämviktsläget, och nedåt om den är ovanför. Antag att vikten vid tiden noll befann sig i jämviktsläget och hade hastigheten 1 m/s nedåt, och bestäm en funktion som beskriver viktens position i termer av meter från jämviktsläget med positiv riktning nedåt.

Kom ihåg att om $s(t)$ anger ett objekts position, så är $s''(t)$ dess acceleration. (4p)

VÄND! →

7. Bevisa att om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller det att $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. (3p)

8. Formulera och bevisa analysens huvudsats. (3p)

Lycka till!