

1 Uppgift 1

Uppgift: Beräkna följande integraler:

$$(a) \int \frac{2x}{(x^2-1)(x+1)} dx \quad (b) \int \cos(x) \sin(x) e^{\cos^2(x)} dx \quad (c) \int_0^1 x \arctan(x) dx$$

Lösning: För att lösa a) gör vi en partialbråksuppdelning. Vi har

$$\frac{2x}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}$$

Vi antar en partialbråksuppdelning av detta:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Likhet mellan VL och HL kräver

$$\begin{aligned} 2x &= A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) \\ x=1 : \quad 2 &= 4A \quad \Leftrightarrow \quad A = 1/2 \\ x=-1 : \quad -2 &= -2C \quad \Leftrightarrow \quad C = 1 \\ x=0 : \quad 0 &= A - B - C \quad \Leftrightarrow \quad B = A - C = 1/2 - 1 = -1/2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \int \cos(x) \sin(x) e^{\cos^2(x)} dx &= \left[\begin{array}{l} z = \cos^2(x) \\ dz = -2 \cos(x) \sin(x) dx \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int e^z dz = -\frac{1}{2} e^z + C = [z = \cos^2(x)] \\ &= -\frac{1}{2} e^{\cos^2(x)} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \int_0^1 x \arctan(x) dx &\stackrel{PI}{=} \left[\frac{x^2}{2} \arctan(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \left[\frac{x^2}{2} \arctan(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \arctan(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x) \right]_0^1 = \left[\frac{(x^2+1)}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} \right]_0^1 \\ &= \left(\arctan(1) - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \arctan(0) - 0 \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} a) \quad \int \frac{2x}{(x^2-1)(x+1)} dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{x-1} + C \\ b) \quad \int \cos(x) \sin(x) e^{\cos^2(x)} dx &= -\frac{1}{2} e^{\cos^2(x)} + C \\ c) \quad \int_0^1 x \arctan(x) dx &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2 Uppgift 2

Uppgift: För den geometriska talföljden $a_1, a_2, \dots$ är $a_1 = -9$ och $a_2 = 6$. Avgör om serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

är konvergent och bestäm i så fall dess summa.

Lösning: Elementen i en geometrisk talföljd ges av $a_k = a_1 q^{k-1}$ där q är talföljdens kvot. Vi har $a_1 = -9$ och

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}.$$

Det gäller att serien är konvergent eftersom $|q| = 2/3 < 1$. Då har vi att seriens summa ges av

$$s_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_1 q^{k-1}) = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-9}{1+2/3} = \frac{-9}{5/3} = -\frac{27}{5}.$$

Svar: Serien är konvergent och summan är $-\frac{27}{5}$.

3 Uppgift 3

Uppgift: Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=2}^n (3k^2 - 9k + 7) = (n-1)^3$$

för alla heltal $n \geq 2$.

Lösning:

Utsaga: $\sum_{k=2}^n (3k^2 - 9k + 7) = (n-1)^3$ för alla heltal $n \geq 2$.

Bevis:

- Då $n = 2$ gäller att

$$VL = \sum_{k=2}^2 (3k^2 - 9k + 7) = 12 - 18 + 7 = 1$$

$$HL = (n-1)^3 \Big|_{n=2} = 1^3 = 1$$

$VL = HL$. Därmed är utsagan är sann för $n = 2$.

- Antag att

$$\sum_{k=2}^m (3k^2 - 9k + 7) = (m-1)^3$$

för något heltal $m \geq 2$. Då gäller för $n = m+1$ att

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m+1} (3k^2 - 9k + 7) &= \sum_{k=2}^m (3k^2 - 9k + 7) + [3(m+1)^2 - 9(m+1) + 7] = \\ &= (m-1)^3 + [3(m+1)^2 - 9(m+1) + 7] = \\ &= (m-1)(m^2 - 2m + 1) + [3m^2 - 3m + 1] = \\ &= m^3 - 3m^2 + 3m - 1 + [3m^2 - 3m + 1] = m^3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Utsagan är sann för $n = m+1$.

Induktionsprincipen ger därmed att utsagan är sann för alla heltal $n \geq 2$.

VSV.

4 Uppgift 4

Uppgift: Lös följande differentialekvationer:

(a) $3y''(x) - 12y'(x) - 15y(x) = 9e^{2x}$

(b) $\begin{cases} 3y^2(x)y'(x) = \frac{1+y^3(x)}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

(c) $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \sin(x), \quad x > 0$

Lösning: **Uppgift a):**

$$3y''(x) - 12y'(x) - 15y(x) = 9e^{2x} \quad (4.1)$$

är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen ges av

$$P(r) = 3r^2 - 12r - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 4r = 5 \quad \Leftrightarrow \quad (r - 2)^2 = 5 + 4 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \pm 3$$

och har rötterna $r_1 = -1$ och $r_2 = 5$. Den allmänna lösningen till den homogena motsvarigheten till (4.1) ges därför av

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{5x}$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(x)$ till den inhomogena differentialekvationen (4.1) baserat på HL i (4.1). Eftersom sagda högerled består av $9e^{2x}$ ansätter vi:

$$y_p(x) = De^{2x}$$

där D är en konstant. Vi har

$$y_p'(x) = 2De^{2x} \quad y_p''(x) = 4De^{2x}$$

och insättning av y_p i ekvationen (4.1) ger

$$\begin{aligned} 12De^{2x} - 24De^{2x} - 15De^{2x} &= 9e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad -27De^{2x} = 9e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{9}{-27} = -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow \quad y_p(x) &= -\frac{e^{2x}}{3}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till (4.1) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{5x} - \frac{e^{2x}}{3}$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Uppgift b):

$$3y^2y' = \frac{1+y^3}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3y^2}{1+y^3}y' = \frac{1}{x}$$

är en separabel differentialekvation. Vi har

$$\frac{3y^2}{1+y^3} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3y^2}{1+y^3} dy = \frac{1}{x} dx$$

Integration av båda led ger

$$\underbrace{\int \frac{1}{x} dx}_{=\ln|x|+D} = \int \frac{3y^2}{1+y^3} dy = [f(y) = 1+y^3] = \int \frac{f'(y)}{f(y)} dy = \ln|f(y)| + E = \ln|1+y^3| + E$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|1+y^3| = \ln|x| + F \quad \Leftrightarrow \quad |1+y^3| = e^{\ln|x|+F} = |x|e^F \quad \Leftrightarrow \quad 1+y^3 = Cx \quad \Leftrightarrow \quad y = (Cx-1)^{1/3}$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ger villkoret

$$0 = y(1) = (C-1)^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad C-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = (x-1)^{1/3}.$$

Uppgift c):

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \sin(x), \quad x > 0$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplicera båda led med den integrerande faktorn $e^{\ln(x)} = x$. Då har vi

$$\frac{d}{dx}(yx) = y'x + y = x \left(y' + \frac{y}{x} \right) = x \sin(x)$$

Integration av VL och HL m.a.p. x ger då

$$\int \frac{d}{dx}(yx) dx = \int x \sin(x) dx \stackrel{PI}{=} -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C$$

$$\Leftrightarrow yx = -x \cos(x) + \sin(x) + C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(x) + C}{x}, \quad x > 0$$

Svar:

a) $y(x) = Ae^{-x} + Be^{5x} - \frac{e^{2x}}{3}$ b) $y(x) = (x-1)^{1/3}$

c) $y(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(x) + C}{x}, \quad x > 0$

5 Uppgift 5

Uppgift: Låt $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ och låt D vara området i xy -planet som begränsas av kurvorna $y = f(x)$, $y = -f(x)$, $x = 1$ och $x = 2$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring y -axeln.

Lösning: $D_f = \{x : x \geq 1\}$. Området D är symmetriskt kring x -axeln, så rotationskroppens volym är dubbelt så stor som volymen för den rotationskropp som skapas då det område D_+ som begränsas av kurvorna $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ och $x = 2$ roteras kring y -axeln:

$$V = 2V_+$$

Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig på $[1, 2]$, med $f(x) \geq 0$, kan volymen av V_+ beräknas via metoden med cylindriska skal,

$$\begin{aligned} V_+ &= 2\pi \int_1^2 x f(x) dx = 2\pi \int_1^2 x \sqrt{x^2 - 1} dx = \pi \int_1^2 2x \sqrt{x^2 - 1} dx = \left[\begin{array}{l} z = x^2 - 1 \\ dz = 2x dx \end{array} \right] \\ &= \pi \int_0^3 z^{1/2} dz = \pi \left[\frac{2z^{3/2}}{3} \right]_0^3 = \pi (2\sqrt{3} - 0) = 2\pi\sqrt{3} \\ &\Rightarrow V = 2V_+ = 4\pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

Svar: $V = 4\pi\sqrt{3}$.

6 Uppgift 6

En vikt på 1 kg hänger i en fjäder och guppar upp och ned under inverkan av gravitationskraften och kraften från fjädern. Accelerationen av vikten är då proportionell mot avvikelserna i sträcka från viktens jämviktsläge, så att vikten accelereras uppåt om den befinner sig nedanför jämviktsläget, och nedåt om den är ovanför. Antag att vikten vid tiden noll befann sig i jämviktsläget och hade hastigheten 1 m/s nedåt, och bestäm en funktion som beskriver viktens position i termer av meter från jämviktsläget med positiv riktning nedåt.

Kom ihåg att om $s(t)$ anger ett objekts position, så är $s''(t)$ dess acceleration.

Lösning: Låt $s(t)$ beskriva viktens position i meter från jämviktsläget vid tiden t sekunder, med positiv riktning nedåt. Då ges det aktuella begynnelsevärdesproblemet av

$$\begin{cases} s''(t) = -ks(t), & k > 0 \\ s(0) = 0 \\ s'(0) = 1 \end{cases}$$

där k är en positiv konstant och $s'(t)$ har enheten m/s. Vi har att

$$s'' + ks = 0$$

är en homogen linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karakteristiska ekvationen ges av

$$r^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = -k, \quad k > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm i\sqrt{k}$$

och har rötterna $r_{1,2} = \pm i\sqrt{k} = 0 \pm i\sqrt{k}$. Den allmänna lösningen för $s(t)$ är då

$$s(t) = A \cos(t\sqrt{k}) + B \sin(t\sqrt{k}) \quad \Rightarrow \quad s'(t) = -\sqrt{k}A \sin(t\sqrt{k}) + \sqrt{k}B \cos(t\sqrt{k})$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Begynnelsevillkoren $s(0) = 0$ och $s'(0) = 1$ ger

$$s(0) = A = 0, \quad s'(0) = \sqrt{k}B = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B = 1/\sqrt{k}$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(t\sqrt{k})$$

Svar: Viktens position, i meter räknat nedåt från dess jämviktsläge och vid tiden t sekunder, ges av

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(t\sqrt{k}).$$