

Tentamen
MVE426/MVE425/MVE640, Matematik, del D
2024-05-13, 14.00–18.00

Telefonvakt: Anna Karlsson, 0721-575850.

Hjälpmedel: Inga.

Betygsgränser (inklusive bonuspoäng): 3:a: 20-27 poäng, 4:a: 28-34 poäng, 5:a: 35-40 poäng.

Resultatet meddelas i LADOK.

OBS! Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida). Numrera de inlämnade bladen *efter* att du har sorterat dem! Använd inte röd penna!

1. Beräkna följande integraler:

(a) $\int (x^2 + x) \cos(-x) dx$ (b) $\int \frac{1+x}{x+x^3} dx$ (c) $\int_0^8 \frac{1}{x+x^{1/3}} dx$ (9p)

2. Hitta en geometrisk talföljd $a_1, a_2, \dots$ sådan att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 27$. (3p)

3. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k^2 - 3k + 2} = 1 - \frac{1}{n-1}$$

för alla heltal $n \geq 3$. (5p)

4. Lös följande differentialekvationer:

(a) $y'(x) = \tan[y(x)]$ (3p)

(b) $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 3x^2$ (3p)

(c) $\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = 2x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (3p)

5. Låt D vara området i xy -planet som begränsas av graferna till $f(x) = -x^2 + 2$ och $g(x) = x^2$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring x -axeln. (4p)

6. En röd ballong har blivit punkterad, och mängden luft som pyser ut per sekund är proportionell mot skillnaden i lufttryck inne i och utanför ballongen. Under ett antagande om att trycket är proportionellt mot volymen luft i ballongen, och inte beror av någon annan variabel, samt att trycket i ballongen vid tiden noll var 106 kPa, bestäm en funktion som beskriver lufttrycket i ballongen genom att lösa en lämplig differentialekvation. Vad händer med lufttrycket i ballongen när tiden går mot oändligheten? (4p)

7. Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. (3p)

8. Bevisa integrationsregeln

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx,$$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$. (3p)

Lycka till!