

Tentamen
MVE426/MVE425/MVE640, Matematik, del D
2023-08-18, 14.00–18.00

Telefonvakt: Anna Karlsson, 0721-575850.

Hjälpmedel: Inga.

Betygsgränser (inklusive bonuspoäng): 3:a: 20-27 poäng, 4:a: 28-34 poäng, 5:a: 35-40 poäng.

Resultatet meddelas i LADOK.

OBS! Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida). Numrera de inlämnade bladen *efter* att du har sorterat dem! Använd inte röd penna!

1. Beräkna följande integraler:

$$(a) \int_2^4 x^2 e^{2x} dx \quad (b) \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \int \frac{4}{1-x-x^2+x^3} dx \quad (9p)$$

2. Hitta en geometrisk talföljd $a_1, a_2, \dots$ sådan att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 10$. (3p)

3. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(1-k)} = \frac{1}{n} - 1$$

för alla heltal $n \geq 2$. (5p)

4. Lös följande differentialekvationer:

$$(a) \quad 2y''(x) + 4y'(x) - 6y(x) = 6e^{3x} \quad (3p)$$

$$(b) \quad \begin{cases} y'(x) = [1 + (y(x))^2]e^x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (3p)$$

$$(c) \quad y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{3x}{1+x^3}, \quad x > 0 \quad (3p)$$

5. Låt D vara området i xy -planet som begränsas av graferna till $f(x) = \sqrt{x}$ och $g(x) = x^2$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring x -axeln. (4p)

6. I ett kallt rum står ett hett element som värmer upp rummet så att temperaturen i rummet skulle ha stigit med 1°C per timme, om det inte var för att någon hade lämnat en dörr på glänt. Den öppna dörren släpper ut värme så att den orsakar en temperatursänkning i rummet som är proportionell mot temperaturen i rummet (i $^\circ\text{C}$). Från början är temperaturen i rummet 16°C , och allt eftersom tiden går stabiliseras temperaturen mot 10°C . Bestäm en funktion som beskriver temperaturen i rummet genom att lösa en lämplig differentialekvation. (4p)

7. Bevisa att om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller det att $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. (3p)

8. Bevisa integrationsregeln

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx,$$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$. (3p)

Lycka till!