

1 Uppgift 1

Uppgift: Beräkna följande integraler:

$$(a) \int_2^4 x^2 e^{2x} dx \quad (b) \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \int \frac{4}{1-x-x^2+x^3} dx$$

Lösning:

$$\begin{aligned} a) \quad \int x^2 e^{2x} dx &\stackrel{PI}{=} \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx \stackrel{PI}{=} \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C = (2x^2 - 2x + 1) \frac{e^{2x}}{4} + C \\ \Rightarrow \quad \int_2^4 x^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{4} [(2x^2 - 2x + 1)e^{2x}]_2^4 = \frac{1}{4} (25e^8 - 5e^4) = \frac{5e^4}{4} (5e^4 - 1) \end{aligned}$$

$$b) \quad \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} z = \sqrt{x} \\ dz = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow 2dz = \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{array} \right] = 2 \int \sin(z) dz = -2 \cos(z) + C = [z = \sqrt{x}] = -2 \cos(\sqrt{x}) + C$$

För att lösa c) gör vi en partialbråksuppdelning. Vi har

$$\frac{4}{1-x-x^2+x^3} = \frac{4}{(x+1)(x-1)^2}$$

Vi ansätter en partialbråksuppdelning av detta:

$$\frac{4}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Likhet mellan VL och HL kräver

$$\begin{aligned} 4 &= A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1) \\ x=1 : \quad 4 &= 2C \quad \Leftrightarrow \quad C=2 \\ x=-1 : \quad 4 &= 4A \quad \Leftrightarrow \quad A=1 \\ x=0 : \quad 4 &= A-B+C \quad \Leftrightarrow \quad B=A+C-4=3-4=-1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int \frac{4}{(x+1)(x-1)^2} dx &= \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx = \\ &= \ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} a) \quad \int_2^4 x^2 e^{2x} dx &= \frac{5e^4}{4} (5e^4 - 1) \\ b) \quad \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= -2 \cos(\sqrt{x}) + C \\ c) \quad \int \frac{4}{(x+1)(x-1)^2} dx &= \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{2}{1-x} + C \end{aligned}$$

2 Uppgift 2

Uppgift: Hitta en geometrisk talföljd $a_1, a_2, \dots$ sådan att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 10$.

Lösning: Elementen i en geometrisk talföljd ges av $a_k = a_1 q^{k-1}$ där q är talföljdens kvot. För att en geometrisk serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ska vara konvergent krävs att $-1 < q < 1$, och då ges dess summa av

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Den sökta serien ska alltså ha a_1 och $-1 < q < 1$ sådana att

$$\frac{a_1}{1-q} = 10.$$

T.ex. kan vi välja $q = 1/2$,

$$\Rightarrow 10 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-1/2} = 2a_1 \quad \Leftrightarrow a_1 = 5. \quad (2.1)$$

Svar: Den geometriska talföljden $5, 5/2, \dots$ har $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 10$.

3 Uppgift 3

Uppgift: Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(1-k)} = \frac{1}{n} - 1$$

för alla heltal $n \geq 2$.

Lösning:

Utsaga: $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(1-k)} = \frac{1}{n} - 1$ för alla heltal $n \geq 2$.

Bevis:

- Då $n = 2$ gäller att

$$VL = \sum_{k=2}^2 \frac{1}{k(1-k)} = \frac{1}{2(1-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$HL = \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \Big|_{n=2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$VL = HL$. Därmed är utsagan är sann för $n = 2$.

- Antag att

$$\sum_{k=2}^m \frac{1}{k(1-k)} = \frac{1}{m} - 1$$

för något heltal $m \geq 2$. Då gäller för $n = m + 1$ att

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m+1} \frac{1}{k(1-k)} &= \sum_{k=2}^m \frac{1}{k(1-k)} + \frac{1}{(m+1)(1-m-1)} = \\ &= \frac{1}{m} - 1 - \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m(m+1)} - 1 = \frac{m+1-1}{m(m+1)} - 1 = \\ &= \frac{m}{m(m+1)} - 1 = \frac{1}{m+1} - 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Utsagan är sann för $n = m + 1$.

Induktionsprincipen ger därmed att utsagan är sann för alla heltal $n \geq 2$.

VSV.

4 Uppgift 4

Uppgift: Lös följande differentialekvationer:

- (a) $2y''(x) + 4y'(x) - 6y(x) = 6e^{3x}$
- (b) $\begin{cases} y'(x) = [1 + (y(x))^2]e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$
- (c) $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{3x}{1+x^3}, \quad x > 0$

Lösning: **Uppgift a):**

$$2y''(x) + 4y'(x) - 6y(x) = 6e^{3x} \quad (4.1)$$

är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen ges av

$$P(r) = 2r^2 + 4r - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 2r = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (r+1)^2 = 3+1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad r = -1 \pm 2$$

och har rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = -3$. Den allmänna lösningen till den homogena motsvarigheten till (4.1) ges därför av

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{-3x}$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(x)$ till den inhomogena differentialekvationen (4.1) baserat på HL i (4.1). Eftersom sagda högerled består av $6e^{3x}$ ansätter vi:

$$y_p(x) = De^{3x}$$

där D är en konstant. Vi har

$$y_p'(x) = 3De^{3x} \quad y_p''(x) = 9De^{3x}$$

och insättning av y_p i ekvationen (4.1) ger

$$\begin{aligned} 18De^{3x} + 12De^{3x} - 6De^{3x} &= 6e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad 24De^{3x} = 6e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \quad y_p(x) &= \frac{e^{3x}}{4}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till (4.1) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{-3x} + \frac{e^{3x}}{4}$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Uppgift b):

$$y' = (1 + y^2)e^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{1 + y^2} = e^x$$

är en separabel differentialekvation. Vi har

$$\frac{1}{1 + y^2} \frac{dy}{dx} = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1 + y^2} dy = e^x dx$$

Integration av båda led ger

$$\underbrace{\int \frac{1}{1 + y^2} dy}_{=\arctan(y)+E} = \int e^x dx = e^x + D \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(y) = e^x + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \tan(e^x + C)$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ tillsammans med $\arctan(y) = e^x + C \in (-\pi/2, \pi/2)$ ger villkoret

$$\begin{aligned} y(0) = \tan(e^0 + C) = \tan(1 + C) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -1 \\ \Rightarrow \quad y(x) &= \tan(e^x - 1). \end{aligned}$$

Uppgift c):

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{3x}{1+x^3}, \quad x > 0$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplicera båda led med den integrerande faktorn $e^{\ln(x)} = x$. Då har vi

$$\frac{d}{dx}(yx) = y'x + y = x\left(y' + \frac{y}{x}\right) = \frac{3x^2}{1+x^3}$$

Integration av VL och HL m.a.p. x ger då

$$\int \frac{d}{dx}(yx) dx = \int \frac{3x^2}{1+x^3} dx = [f(x) = 1+x^3] = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + D = \ln|1+x^3| + D$$

$$\Leftrightarrow yx = \ln|1+x^3| + C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{\ln(1+x^3) + C}{x}, \quad x > 0$$

Svar:

a) $y(x) = Ae^x + Be^{-3x} + \frac{e^{3x}}{4}$ b) $y(x) = \tan(e^x - 1)$.

c) $y(x) = \frac{\ln(1+x^3) + C}{x}, \quad x > 0$

5 Uppgift 5

Uppgift: Låt D vara området i xy -planet som begränsas av graferna till $f(x) = \sqrt{x}$ och $g(x) = x^2$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring x -axeln.

Lösning: $D_f = \{x : x \geq 0\}$ och $D_g = \mathbb{R}$. För att avgöra inom vilket intervall (i x) som graferna begränsar ett område i xy -planet söker vi skärningspunkterna mellan graferna,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = x^2 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vi har två skärningspunkter, $x \in \{0, 1\}$. Området D begränsas därför av graferna till $f(x), g(x)$ samt av linjerna $x = 0$ och $x = 1$. Eftersom $f(x) > g(x)$ då $x \in (0, 1)$ ges volymen av den kropp som fås då D roteras kring x -axeln via metoden med cirkelskivor av

$$\begin{aligned} V &= V_f - V_g = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx - \pi \int_0^1 (g(x))^2 dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - 0 = \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

Svar: $A = \frac{3\pi}{10}$.

6 Uppgift 6

I ett kallt rum står ett hett element som värmer upp rummet så att temperaturen i rummet skulle ha stigit med 1 °C per timme, om det inte var för att någon hade lämnat en dörr på glänt. Den öppna dörren släpper ut värme så att den orsakar en temperatursänkning i rummet som är proportionell mot temperaturen i rummet (i °C). Från början är temperaturen i rummet 16 °C, och allt eftersom tiden går stabiliseras temperaturen mot 10 °C. Bestäm en funktion som beskriver temperaturen i rummet genom att lösa en lämplig differentialekvation.

Lösning: Låt $y(t)$ beskriva temperaturen i rummet (i °C) som en funktion av tiden (i timmar). Den aktuella differentialekvationen ges av

$$\begin{cases} y'(t) = -ky(t) + 1, & k > 0 \\ y(0) = 16 \end{cases}$$

där k är en konstant. Vi har att

$$y' + ky = 1$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplikation av båda led med den integrerande faktorn e^{kt} ger

$$\frac{d}{dt}(ye^{kt}) = y'e^{kt} + kye^{kt} = 1e^{kt} = e^{kt}$$

Integration av båda led m.a.p. t ger

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}(ye^{kt}) dt &= \int e^{kt} dt \\ \Leftrightarrow ye^{kt} &= \frac{1}{k}e^{kt} + C \quad \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{k} + Ce^{-kt} \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 16$ ger

$$\begin{aligned} y(0) = \frac{1}{k} + Ce^0 &= \frac{1}{k} + C = 16 \quad \Leftrightarrow C = 16 - \frac{1}{k} \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{k} + \left(16 - \frac{1}{k}\right)e^{-kt} \end{aligned}$$

Vi har även att

$$\begin{aligned} 10 &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \stackrel{k>0}{=} \frac{1}{k} \quad \Leftrightarrow k = \frac{1}{10} \\ \Rightarrow y(t) &= 10 + 6e^{-t/10} \end{aligned}$$

Svar: Temperaturen i rummet, i °C och vid tiden t timmar, ges av $y(t) = 10 + 6e^{-t/10}$.