

1 Uppgift 1

Uppgift: Beräkna följande integraler:

$$(a) \int x \cos(x^2) dx \quad (b) \int x \ln(\sqrt{x}) dx \quad (c) \int \frac{2}{x^3 + 2x} dx$$

Lösning:

$$a) \int x \cos(x^2) dx = \left[\begin{array}{l} z = x^2 \\ dz = 2x dx \\ \Leftrightarrow \frac{dz}{2} = x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \cos(z) dz = \frac{1}{2} \sin(z) + C = [z = x^2] = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$$

$$\begin{aligned} b) \int x \ln(\sqrt{x}) dx &= \frac{1}{2} \int x \ln(x) dx \stackrel{PI}{=} \frac{x^2}{4} \ln(x) - \frac{1}{4} \int x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{4} \ln(x) - \frac{1}{4} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{4} \ln(x) - \frac{x^2}{8} + C \end{aligned}$$

För att lösa c) gör vi en partialbråksuppdelning. Vi har

$$\frac{2}{x^3 + 2x} = \frac{2}{x(x^2 + 2)}$$

Vi ansätter en partialbråksuppdelning av detta:

$$\frac{2}{x(x^2 + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}$$

Likhet mellan VL och HL kräver

$$\begin{aligned} 2 &= A(x^2 + 2) + Bx^2 + Cx \\ x^0 : \quad 2 &= 2A \quad \Leftrightarrow \quad A = 1 \\ x^1 : \quad 0 &= C \quad \Leftrightarrow \quad C = 0 \\ x^2 : \quad 0 &= A + B \quad \Leftrightarrow \quad B = -A = -1 \\ \Rightarrow \quad \frac{2}{x(x^2 + 2)} &= \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 2} \\ \Rightarrow \quad \int \frac{2}{x(x^2 + 2)} dx &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2 + 2} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| + C \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} a) \int x \cos(x^2) dx &= \frac{1}{2} \sin(x^2) + C \\ b) \int x \ln(\sqrt{x}) dx &= \frac{x^2}{4} \ln(x) - \frac{x^2}{8} + C \\ c) \int \frac{2}{x^3 + 2x} dx &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| + C \end{aligned}$$

2 Uppgift 2

Uppgift: För den geometriska talföljden $a_1, a_2, \dots$ är $a_1 = 5$ och $a_2 = 4$. Avgör om serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

är konvergent och bestäm i så fall dess summa.

Lösning: Elementen i en geometrisk talföljd ges av $a_k = a_1 q^{k-1}$ där q är talföljdens kvot. Vi har $a_1 = 5$ och

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{5}.$$

Det gäller att serien är konvergent eftersom $|q| = 4/5 < 1$. Då har vi att seriens summa ges av

$$s_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_1 q^{k-1}) = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-4/5} = \frac{25}{5-4} = 25. \quad (2.1)$$

Svar: Serien är konvergent och summan är 25.

3 Uppgift 3

Uppgift: Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=1}^n (k-1)(3k-2) = n^2(n-1)$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Lösning:

Utsaga: $\sum_{k=1}^n (k-1)(3k-2) = n^2(n-1)$ för alla heltal $n \geq 1$.

Bevis:

- Då $n = 1$ gäller att

$$VL = \sum_{k=1}^1 (k-1)(3k-2) = (1-1)(3-2) = 0$$

$$HL = n^2(n-1) \Big|_{n=1} = 1^2(1-1) = 0$$

$VL = HL$. Därmed är utsagan är sann för $n = 1$.

- Antag att

$$\sum_{k=1}^m (k-1)(3k-2) = m^2(m-1)$$

för något heltal $m \geq 1$. Då gäller för $n = m+1$ att

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} (k-1)(3k-2) &= \sum_{k=1}^m (k-1)(3k-2) + m(3m+3-2) = \\ &= m^2(m-1) + m(3m+3-2) = m(m^2-m) + m(3m+1) = \\ &= m(m^2+2m+1) = m(m+1)^2 = (m+1)^2 m \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Utsagan är sann för $n = m+1$.

Induktionsprincipen ger därmed att utsagan är sann för alla heltal $n \geq 1$.

VSV.

4 Uppgift 4

Uppgift: Lös följande differentialekvationer:

- (a) $\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = e^{-x^2} \\ y(1) = 1/e \end{cases}$
- (b) $y''(x) + 4y(x) = x^2 + 1$
- (c) $\tan[y(x)]y'(x) = \frac{1}{x}$, för $x > 1$

Lösning:

Uppgift a):

$$y'(x) + 2xy(x) = e^{-x^2}$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplicera båda led med den integrerande faktorn e^{x^2} . Då har vi

$$\frac{d}{dx} (ye^{x^2}) = y'e^{x^2} + 2xye^{x^2} = e^{x^2}e^{-x^2} = 1$$

Integration av VL och HL m.a.p. x ger då

$$\int \frac{d}{dx} (ye^{x^2}) dx = \int dx$$

$$\Leftrightarrow ye^{x^2} = x + C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = (x + C)e^{-x^2}$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = e^{-1}$ ger villkoret

$$y(1) = (1 + C)e^{-1} = e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = xe^{-x^2}$$

Uppgift b):

$$y''(x) + 4y(x) = x^2 + 1 \tag{4.1}$$

är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karaktäristiska ekvationen till differentialekvationen ges av

$$P(r) = r^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm 2i$$

och har rötterna $r_1 = 2i$ och $r_2 = -2i$. Den allmänna lösningen till den homogena motsvarigheten till (4.1) ges därför av

$$y_h(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(x)$ till den inhomogena differentialekvationen (4.1) baserat på HL i (4.1). Eftersom sagda högerled består av ett polynom av grad 2 samtidigt som den lägsta derivatan av y i VL är $y^{(0)}$ ansätter vi ett allmänt polynom av grad 2:

$$y_p(x) = Dx^2 + Ex + F$$

där D, E och F är konstanter. Vi har

$$y_p'(x) = 2Dx + E \quad y_p''(x) = 2D$$

och insättning av y_p i ekvationen (4.1) ger

$$2D + 4(Dx^2 + Ex + F) = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4Dx^2 + 4Ex + (4F + 2D) = x^2 + 1$$

Likhet för alla x kräver

$$x^2 : \quad 4D = 1 \quad \Leftrightarrow \quad D = 1/4$$

$$x^1 : \quad 4E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0$$

$$x^0 : \quad 4F + 2D = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4F = 1 - 2D = 1/2 \quad \Leftrightarrow \quad F = 1/8$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}.$$

Den allmänna lösningen till (4.1) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x) + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Uppgift c):

$$\tan[y(x)]y'(x) = \frac{1}{x}, \text{ för } x > 1$$

är en separabel differentialekvation. Vi har

$$\tan(y) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \tan(y) dy = \frac{1}{x} dx$$

Integration av båda led ger

$$\int \tan(y) dy = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + D, \quad (x > 1)$$

där

$$\begin{aligned} \int \tan(y) dy &= \int \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy = \left[\begin{array}{l} f(y) = \cos(y) \\ f'(y) = -\sin(y) \end{array} \right] = - \int \frac{f'(y)}{f(y)} dy = -\ln|f(y)| + E = \\ &= -\ln|\cos(y)| + E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\ln|\cos(y)| = \ln(x) + A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\cos(y)|} = xe^A \Leftrightarrow |\cos(y)| = \frac{1}{x} e^{-A} \xrightarrow{x>1} \cos(y) = \frac{C}{x}, \quad 0 < C \leq 1, \text{ för } x > 1$$

$$\Rightarrow y(x) = \arccos\left(\frac{C}{x}\right), \quad 0 < C \leq 1, x > 1$$

Svar:

a) $y(x) = xe^{-x^2}$ b) $y(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x) + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}.$

c) $y(x) = \arccos\left(\frac{C}{x}\right), \quad 0 < C \leq 1, x > 1$

5 Uppgift 5

Uppgift: Beräkna arean av det område som begränsas av graferna till $f(x) = x^2 + 2x$ och $g(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

Lösning: $D_f = D_g = \mathbb{R}$. För att avgöra inom vilket intervall (i x) som graferna begränsar ett område i xy -planet söker vi skärningspunkterna mellan graferna,

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x(x+2) = x(x^2 + x - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = x^2 + x - 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vi har tre skärningspunkter, $x \in \{0, \pm 2\}$. Arean begränsas därför av graferna till $f(x), g(x)$ samt av linjerna $x = -2$ och $x = 2$. $f(x) > g(x)$ då $x \in (0, 2)$ och $f(x) < g(x)$ då $x \in (-2, 0)$. Arean av området ges av

$$A = \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx + \int_{-2}^0 (g(x) - f(x)) dx$$

Vi kan använda att vi har en jämn funktion $h(x) = |f(x) - g(x)| = |4x - x^3|$, eftersom $h(-x) = h(x)$:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^2 |4x - x^3| dx = 2 \int_0^2 |4x - x^3| dx = 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \\ &= 2 \left(8 - \frac{16}{4} \right) - 0 = 8 \end{aligned}$$

Svar: $A = 8$.

6 Uppgift 6

En lösning med natriumklorid innehåller till en början 10 gram natriumklorid per liter lösning. Tio procent av natriumkloriden i lösningen försvinner från lösningen varje sekund via diffusion genom ett membran. Samtidigt tillsätts i varje ögonblick natriumklorid till lösningen i en mängd som motsvarar e^{-t} gram natriumklorid per liter och per sekund, där t är tiden som har gått räknat i sekunder. Antag att natriumkloriden omedelbart fördelar sig jämnt i lösningen, som är under omrörning. Ställ upp en differentialekvation som beskriver koncentrationen av natriumklorid i lösningen, och använd begynnelsevillkoret för att bestämma ett uttryck för koncentrationen som en funktion av tiden.

Lösning: Låt $y(t)$ beskriva koncentrationen av natriumklorid i lösningen (gram per liter lösning vid tiden t sekunder). Den aktuella differentialekvationen ges av

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{1}{10}y(t) + e^{-t} \\ y(0) = 10 \end{cases}$$

Vi har att

$$y' + \frac{1}{10}y = e^{-t}$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplikation av båda led med den integrerande faktorn $e^{t/10}$ ger

$$\frac{d}{dt} (ye^{t/10}) = y'e^{t/10} + \frac{1}{10}ye^{t/10} = e^{-t}e^{t/10} = e^{(1/10-1)t} = e^{-9t/10}$$

Integration av båda led m.a.p. t ger

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt} (ye^{t/10}) dt &= \int e^{-9t/10} dt \\ \Leftrightarrow ye^{t/10} &= -\frac{10}{9}e^{-9t/10} + C \Leftrightarrow y(t) = -\frac{10}{9}e^{-t} + Ce^{-t/10} \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 10$ ger

$$y(0) = -\frac{10}{9}e^0 + Ce^0 = -\frac{10}{9} + C = 10 \Leftrightarrow C = 10 + \frac{10}{9} = \frac{100}{9}$$

Svar: Koncentrationen av natriumklorid i gram per liter lösning vid tiden t sekunder ges av $y(t) = \frac{10}{9}(10e^{-t/10} - e^{-t})$.