

1 Uppgift 1

Uppgift: Beräkna följande integraler:

$$(a) \int x^2 \cos(x) dx \quad (b) \int_{1/e}^e \frac{|\ln(x)|}{x} dx \quad (c) \int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx$$

Lösning:

$$\begin{aligned} a) \quad \int x^2 \cos(x) dx &\stackrel{PI}{=} x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x) dx \stackrel{PI}{=} x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - \int 2 \cos(x) dx \\ &= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + C = (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \int_{1/e}^e \frac{|\ln(x)|}{x} dx &= \left[\begin{array}{l} z = \ln(x) \\ dz = \frac{1}{x} dx \\ x = e \Rightarrow z = \ln(e) = 1 \\ x = 1/e \Rightarrow z = \ln(e^{-1}) = -1 \end{array} \right] = \int_{-1}^1 |z| dz = \left[\begin{array}{l} \text{jämn funktion} \\ |-z| = |z| \end{array} \right] = \\ &= 2 \int_0^1 |z| dz = 2 \int_0^1 z dz = 2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = 1 \end{aligned}$$

För att lösa c) gör vi en partialbråksuppdelning. Vi har

$$\frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 4 + 4}{x^2 - 4} = 1 + \frac{4}{x^2 - 4} = 1 + \frac{4}{(x - 2)(x + 2)}$$

Vi ansätter en partialbråksuppdelning av den sista termen:

$$\frac{4}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

Likhet mellan VL och HL kräver

$$\begin{aligned} 4 &= A(x + 2) + B(x - 2) \\ x = 2 : \quad 4 &= 4A + 0 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \\ x = -2 : \quad 4 &= 0 - 4B \quad \Rightarrow \quad B = -1 \\ \Rightarrow \quad \frac{4}{(x - 2)(x + 2)} &= \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} \\ \Rightarrow \quad \int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx &= \int dx + \int \frac{1}{x - 2} dx - \int \frac{1}{x + 2} dx = x + \ln|x - 2| - \ln|x + 2| + C \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} a) \quad \int x^2 \cos(x) dx &= (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x) + C \\ b) \quad \int_{1/e}^e \frac{|\ln(x)|}{x} dx &= 1 \\ c) \quad \int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx &= x + \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C \end{aligned}$$

2 Uppgift 2

Uppgift: För den aritmetiska talföljden $a_1, a_2, \dots$ är $a_1 = 4$ och $a_2 = 12$. Bestäm talföljdens differens och beräkna

$$\sum_{k=1}^{50} a_k$$

Lösning: Talföljdens differens d är

$$d = a_2 - a_1 = 12 - 4 = 8.$$

Vi har

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = n \frac{a_1 + a_n}{2} = n \left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right) = \left[\begin{array}{l} n = 50 \\ d = 8 \\ a_1 = 4 \end{array} \right] = 50(4 + 49 \cdot 4) = 50^2 \cdot 4 = 100^2 = 10\,000$$

Svar: Talföljdens differens är $d = 8$ och summan är 10 000.

3 Uppgift 3

Uppgift: Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=0}^n (3k^2 - k - 1) = (n+1)^2(n-1)$$

för alla heltal $n \geq 0$.

Lösning:

Utsaga: $\sum_{k=0}^n (3k^2 - k - 1) = (n+1)^2(n-1)$ för alla heltal $n \geq 0$.

Bevis:

- Då $n = 0$ gäller att

$$VL = \sum_{k=0}^0 (3k^2 - k - 1) = (3k^2 - k - 1) \Big|_{k=0} = -1 \quad (3.1)$$

$$HL = (n+1)^2(n-1) \Big|_{n=0} = (0+1)^2(0-1) = -1 \quad (3.2)$$

$VL = HL$. Därmed är utsagan är sann för $n = 0$.

- Antag att

$$\sum_{k=0}^m (3k^2 - k - 1) = (m+1)^2(m-1) \quad (3.3)$$

för något heltal $m \geq 0$. Då gäller för $n = m+1$ att

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} (3k^2 - k - 1) &= \sum_{k=0}^m (3k^2 - k - 1) + 3(m+1)^2 - (m+1) - 1 = \\ &= (m+1)^2(m-1) + 3(m+1)^2 - (m+1) - 1 = \\ &= (m+1)^2(m+2) - (m+2) = (m^2 + 2m + 1)(m+2) - (m+2) = \\ &= (m^2 + 2m)(m+2) = m(m+2)(m+2) = (m+2)^2 m \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\Rightarrow$ Utsagan är sann för $n = m+1$.

Induktionsprincipen ger därmed att utsagan är sann för alla heltal $n \geq 0$.

VSV.

4 Uppgift 4

Uppgift: Lös följande differentialekvationer:

- (a) $y'(x) - \sin(x)y(x) = \sin(x) \cos(x)$
- (b) $y'(x) = e^x \sqrt{y(x)}$
- (c) $\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 32x \\ y(0) = -1, y'(0) = 0 \end{cases}$

Lösning:

Uppgift a):

$$y'(x) - \sin(x)y(x) = \sin(x) \cos(x)$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplicera båda led med den integrerande faktorn $e^{\cos(x)}$. Då har vi

$$\frac{d}{dx} \left(e^{\cos(x)} y \right) = e^{\cos(x)} [y'(x) - \sin(x)y(x)] = \sin(x) \cos(x) e^{\cos(x)}$$

Integration av VL och HL m.a.p. x ger då

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx} \left(e^{\cos(x)} y \right) dx &= \int \sin(x) \cos(x) e^{\cos(x)} dx \\ \Leftrightarrow e^{\cos(x)} y &= D + \int \sin(x) \cos(x) e^{\cos(x)} dx = \left[\begin{matrix} z = \cos(x) \\ dz = -\sin(x) dx \end{matrix} \right] = D - \int z e^z dz = \\ &\stackrel{PI}{=} D - z e^z + \int e^z dz = -z e^z + e^z + C = e^z (1 - z) + C = [z = \cos(x)] = \\ &= e^{\cos(x)} (1 - \cos(x)) + C \\ \Rightarrow y(x) &= 1 - \cos(x) + C e^{-\cos(x)} \end{aligned}$$

Uppgift b):

$$y'(x) = e^x \sqrt{y(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{y}} = e^x$$

är en separabel differentialekvation. Vi har

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{y}} dy = e^x dx$$

Integration av båda led ger

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int e^x dx \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{y} = e^x + C, C \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{(e^x + C)^2}{4}, C \geq 0$$

Uppgift c):

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 32x \\ y(0) = -1, y'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karaktäristiska ekvationen till differentialekvationen ges av

$$\begin{aligned} P(r) &= r^2 + 2r - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow (r+1)^2 &= 8+1 = 9 \\ \Leftrightarrow r &= -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3 \end{aligned}$$

och har rötterna $r_1 = 2$ och $r_2 = -4$. Den allmänna lösningen till den homogena motsvarigheten till (4.1) ges därför av

$$y_h(x) = A e^{2x} + B e^{-4x}$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(x)$ till den inhomogena differentialekvationen (4.1) baserat på HL i (4.1). Eftersom sagda högerled består av ett polynom av grad 1 och vårt VL innehåller $y^{(0)}$ ansätter vi ett allmänt polynom av grad 1:

$$y_p(x) = Dx + E$$

där D och E är konstanter. Vi har

$$y_p'(x) = D \quad y_p''(x) = 0$$

och insättning av y_p i ekvationen (4.1) ger

$$2D - 8(Dx + E) = 32x \quad \Leftrightarrow \quad -8Dx + (2D - 8E) = 32x$$

Likhet för alla x kräver

$$\begin{cases} -8D = 32 \\ 2D - 8E = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} D = -32/8 = -4 \\ E = D/4 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = -4x - 1.$$

Den allmänna lösningen till (4.1) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{-4x} - 4x - 1$$

med

$$y'(x) = 2Ae^{2x} - 4Be^{-4x} - 4.$$

Begynnelsevillkoren $y(0) = -1$ och $y'(0) = 0$ ger villkoren

$$\begin{cases} y(0) = A + B - 1 = -1 \\ y'(0) = 2A - 4B - 4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -B \\ 6A = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = 2/3$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{2}{3}(e^{2x} - e^{-4x}) - 4x - 1$$

Svar:

a) $y(x) = 1 - \cos(x) + Ce^{-\cos(x)}.$

b) $y(x) = \frac{(e^x + C)^2}{4}, \quad C \geq 0.$

c) $y(x) = \frac{2}{3}(e^{2x} - e^{-4x}) - 4x - 1.$

5 Uppgift 5

Uppgift: Låt D vara området i xy -planet som begränsas av grafen till $1/(1+x^2)$ samt $x = 1$, $x = 3$ och $y = 0$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring y -axeln.

Lösning:

Volymen för en rotationskropp som genereras av att området D roteras kring y -axeln kan beräknas via metoden med cylindriska skal, eftersom D begränsas av en kontinuerlig funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \geq 0$, x -axeln och ett intervall $[a, b]$ på x -axeln där $0 \leq a < b$. Volymen ges då av

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^3 x f(x) dx = 2\pi \int_1^3 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\begin{array}{l} g(x) = 1+x^2 \\ g'(x) = 2x \end{array} \right] = \pi \int_1^3 \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \pi \left[\ln |g(x)| \right]_1^3 = \\ &= \pi \left[\ln(1+x^2) \right]_1^3 = \pi [\ln(10) - \ln(2)] = \pi \ln(5). \end{aligned}$$

Svar: $V = \pi \ln(5).$

6 Uppgift 6

En fallskärmshoppare som hoppar från ett litet flygplan accelereras med 9.82 meter per sekundkvadrat mot marken på grund av gravitationen. Luftmotståndet ger en acceleration i motsatt riktning, som är proportionell mot fallskärmshopparens hastighet. Antag att fallskärmshopparen faller rakt ned och har hastigheten 2 meter per sekund vid tiden noll. Bestäm en funktion som beskriver fallskärmshopparens hastighet genom att lösa en lämplig differentialekvation.

Kom ihåg att om $v(t)$ anger ett objekts hastighet så är $v'(t)$ dess acceleration.

Lösning: Den aktuella differentialekvationen ges av

$$\begin{cases} v'(t) = g - kv(t), & k > 0, \\ v(0) = 2 \end{cases}$$

där $v(t)$ är fallskärmshopparens hastighet i riktning mot marken, $g = 9.82$ och k är en konstant. Vi har

$$\begin{aligned} v' &= g - kv \\ \Leftrightarrow v' + kv &= g \end{aligned}$$

Multiplikation av båda led med den integrerande faktorn e^{kt} ger

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}v) = e^{kt}v' + e^{kt}kv = ge^{kt}$$

och integration av båda led m.a.p. t ger

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}(e^{kt}v) dt &= \int ge^{kt} dt \\ \Leftrightarrow e^{kt}v &= \frac{g}{k}e^{kt} + C \quad \Leftrightarrow v(t) = \frac{g}{k} + Ce^{-kt} \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret $v(0) = 2$ ger till sist

$$v(0) = \frac{g}{k} + Ce^0 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2 - \frac{g}{k}.$$

Svar: Fallskärmshopparens hastighet i riktning mot marken (enhet: m/s) ges av

$$v(t) = \frac{g}{k} + \left(2 - \frac{g}{k}\right)e^{-kt}, \quad k > 0, \quad g = 9.82.$$