

MVE426/MVE425/MVE640 Matematik, del D, våren 2022

Examinator: Thomas Wernstål, 031-772 3557

Hjälpmedel: Penna, suddgummi, linjal och pennvässare

Tentan har åtta frågor.

Betygsgränser (inklusive bonus): 3:a: 20–27 poäng, 4:a: 28–34 poäng, 5:a: 35–40 poäng

Lösningar publiceras på kurshemsidan första vardagen efter tentamensdagen. Resultatet meddelas i Ladok.

OBS: Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida). Numrera de inlämnade bladen efter att du sorterat dem! Använd inte röd penna!

Fråga 1. Beräkna följande integraler:

$$(a) \int \frac{\ln(x^3)}{2x} dx, \quad (b) \int e^x(x+5)dx, \quad (c) \int \frac{x^2+1}{x^3-1} dx. \quad (9p)$$

Fråga 2. Betrakta följande geometriska serie:

$$7 + 1 + \frac{1}{7} + \dots$$

Skriv serien med summabeteckning och beräkna summan av serien. (3p)

Fråga 3. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

för alla heltal $n \geq 1$. (5p)

Fråga 4. Lös följande differentialekvationer:

$$(a) y''(x) + y(x) = x^2 - 1, \quad (3p)$$

$$(b) y(x)y'(x) = \frac{2}{x}, \text{ för } x > 0, \quad (3p)$$

$$(c) \begin{cases} xy'(x) - y(x) = x, & \text{för } x > 0, \\ y(1) = -1 \end{cases} \quad (3p)$$

Fråga 5. Låt D vara området i xy -planet som begränsas av grafen till $1/x$ samt $x = 1$, $x = 2$ och $y = 0$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring y -axeln. (4p)

Fler uppgifter på nästa sida!

Fråga 6. Låt $y(t)$ vara mängden fiskmat (mätt i gram) som finns i ett visst akvarium vid tiden t (mätt i timmar). De glupska akvariefiskarna äter upp maten i en takt som i varje ögonblick är proportionell mot mängden mat som finns kvar just då. Vid tiden $t = 0$ fanns ingen mat alls, men därefter tillförs ny mat i varje ögonblick i takten $10e^{-t/12}$ gram per timme.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver mängden fiskmat i akvariet. Använd begynnelsevillkoret för att bestämma $y(t)$. (Svaret får lov att innehålla den okända proportionalitetskonstanten, men inga andra okända konstanter.) (3p)

Fråga 7. Bevisa att om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller det att $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. (3p)

Fråga 8. Bevisa analysens huvudsats. (3p)

Lycka till!