
MVE426/MVE425 Matematik, del D, våren 2022
Lösningsförslag

Fråga 1. Beräkna följande integraler:

$$(a) \int \sin(\sqrt{x})dx, \quad (b) \int_{-\pi}^{\pi} |x|dx, \quad (c) \int \frac{1}{x^3 - x}dx. \quad (9p)$$

Lösning. (a) Genom att först göra ett variabelbyte och sedan partiell integration fås

$$\begin{aligned} \int \sin(\sqrt{x})dx &= \left[t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \text{ och alltså } dx = 2t dt \right] \\ &= 2 \int t \sin(t)dt = -2t \cos(t) + 2 \int \cos(t)dt \\ &= -2t \cos(t) + 2 \sin(t) + C \\ &= -2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin(\sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

(b) Vi använder att $|x|$ är en jämn funktion och beräknar

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|dx = 2 \int_0^{\pi} x dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi^2.$$

(c) Faktorisering av nämnaren ger att $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ och partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}.$$

Härifrån kan vi beräkna integralen:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3 + x^2 - 20x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

Fråga 2. Hitta en geometrisk följd $a_1, a_2, \dots$ sådan att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 3$. (3p)

Lösning. Om q är den geometriska följdens kvot så ges summan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1/(1-q)$.

Vi vill alltså ordna så att $a_1/(1-q) = 3$. Vi låter $a_1 = 1$ och då ska $1-q = 1/3$ eller $q = 1 - 1/3 = 2/3$. Då ges den geometriska följdens av att $a_k = a_1 q^{k-1}$ eller

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \dots$$

Men det finns alltså många geometriska följder vars summa är 3.

Fråga 3. Om $a_1, a_2, \dots$ är en aritmetisk följd med differens d då kan man beräkna summan av de n första talen i följderna genom

$$\sum_{k=1}^n a_k = n \left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad \text{för varje heltal } n \geq 1. \quad (1)$$

Visa formeln i (1) med hjälp av induktion. (Visar du formeln utan induktion så får du noll poäng.) (5p)

Lösning. *Basfall:* $n = 1$. Då $n = 1$ ges vänsterledet av $VL = \sum_{k=1}^1 a_k = a_1$ och högerledet av $HL = 1 \left(a_1 + \frac{0 \cdot d}{2} \right) = a_1$. Alltså gäller likheten då $n = 1$.

Induktionssteg: Antag att likheten gäller för något heltal $m \geq 1$ och visa att likheten gäller för $n = m + 1$. Vi beräknar vänsterledet för $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} VL &= \sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1} \\ &= m \left(a_1 + \frac{(m-1)d}{2} \right) + a_1 + md \\ &= (m+1)a_1 + \frac{m(m-1)}{2}d + md \\ &= (m+1)a_1 + \frac{m^2 + m}{2}d \\ &= (m+1) \left(a_1 + \frac{md}{2} \right). \end{aligned}$$

Detta är precis högerledet för $n = m + 1$. Vi har alltså visat likheten för $n = m + 1$.

Slutsats: Enligt induktionsprincipen gäller likheten för alla heltal $n \geq 1$.

Fråga 4. Lös följande differentialekvationer:

(a)
$$\begin{cases} 4y''(x) + 4y'(x) - 15y(x) = e^{-3x}, \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases} \quad (3p)$$

(b)
$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \ln(x) + 1, \quad (x > 0) \quad (3p)$$

(c)
$$(x^2 + 1)y'(x) - 2xy(x) = 3x^2 + 3. \quad (3p)$$

Lösning. (a) Vi löser den homogena ekvationen $4y''(x) + 4y'(x) - 15y(x) = 0$. Det karakteristiska polynomet ges av $4r^2 + 4r - 15$ och dess rötter är $r_1 = -\frac{5}{2}$ och $r_2 = \frac{3}{2}$. Enligt lösningsformeln för homogena differentialekvationer med konstanta koefficienter ges samtliga lösningar av

$$y_h(x) = Ae^{-5x/2} + Be^{3x/2}$$

för några konstanter A och B .

Vi hittar nu en partikulärlösning och vi ansätter då $y_p(x) = Ce^{-3x}$. Vi beräknar:

$$y_p'(x) = -3Ce^{-3x} \quad \text{och} \quad y_p''(x) = 9Ce^{-3x}$$

samt

$$4y_p''(x) + 4y_p'(x) - 15y_p(x) = 36Ce^{-3x} - 12Ce^{-3x} - 15Ce^{-3x} = 9Ce^{-3x}$$

och för att y_p ska vara en lösning till ekvationen ska alltså $9Ce^{-3x} = e^{-3x}$. Då måste $C = \frac{1}{9}$ och $y_p(x) = \frac{1}{9}e^{-3x}$.

Samtliga lösningar till ekvationen av $y = y_h + y_p$ eller $y(x) = Ae^{-5x/2} + Be^{3x/2} + \frac{1}{9}e^{-3x}$.

Om vi nu använder begynnelsevillkoren får vi att $1 = y(0) = A + B + \frac{1}{9}$, $y'(x) = -\frac{5A}{2}e^{-5x/2} + \frac{3B}{2}e^{3x/2} - \frac{3}{9}e^{-3x}$ och $2 = y'(0) = -\frac{5A}{2} + \frac{3B}{2} - \frac{3}{9}$. Löser vi ekvations-systemet får vi att $A = -5/8$ och $B = -10/9$. Sammanfattningsvis är lösningen på begynnelsevärdesproblemet

$$y(x) = 2e^{-5x/2} - \frac{10}{9}e^{3x/2} + \frac{1}{9}e^{-3x}.$$

(b) Denna ekvation är inte linjär men den är separabel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \ln(x) + 1 &\Leftrightarrow & \int \frac{1}{y} dy = \int (\ln(x) + 1) dx \\ & &\Leftrightarrow & \ln|y(x)| = x \ln(x) + C \\ & &\Leftrightarrow & |y(x)| = e^C e^{x \ln(x)} = e^C x^x. \end{aligned}$$

Konstanten e^C är såklart positiv. Vi byter ut den mot en ny konstant D , $D \neq 0$, och får att $y(x) = Dx^x$.

- (c) Denna ekvation är linjär så vi använder metoden med integrerande faktor. Vi dividerar först ekvationen med $x^2 + 1$ och får

$$y'(x) - \frac{2x}{x^2 + 1}y(x) = 3.$$

Vi beräknar

$$\int \left(-\frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = -\ln(x^2 + 1) + C.$$

Vi väljer såklart $C = 0$ så att den integrerande faktorn ges av

$$e^{-\ln(x^2+1)} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Ekvationen blir

$$\left(y(x) \frac{1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{3}{x^2 + 1}$$

och alltså

$$y(x) = 3(x^2 + 1) \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = 3(x^2 + 1) \arctan(x) + 3C(x^2 + 1).$$

Fråga 5. Beräkna arean av det område som begränsas av graferna till $f(x) = \sqrt{3x}$ och $g(x) = \frac{x^3}{2}$ samt av linjen $x = 2$. (4p)

Lösning. Kurvorna skär varandra då

$$\sqrt{3x} = \frac{x^3}{2} \Leftrightarrow x(x^5 - 12) = 0.$$

Två lösningar ges av $x = 0$ och $x = \sqrt[5]{12}$. Det gäller att $\sqrt[5]{12} < 2$. Är $\sqrt{3x} = \frac{x^3}{2}$ för några andra reella tal x ? För att ta reda på detta låter vi $f(x) = \frac{x^3}{2} - \sqrt{3x}$. Vi vet att $f(0) = 0$ och $f(\sqrt[5]{12}) = 0$. Vi har dessutom att

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} = \frac{3x^2\sqrt{x} - \sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$

och $f'(x) = 0$ om och endast om $x = \sqrt[5]{\sqrt{3}/3}$. Om vi gör ett teckenschema ser vi att $x = 0$ och $x = \sqrt[5]{12}$ är de enda nollställena till f . Vi kan nu beräkna arean:

$$\int_0^{\sqrt[5]{12}} \left(\sqrt{3x} - \frac{x^3}{2} \right) dx = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} x^{3/2} - \frac{x^4}{8} \right]_0^{\sqrt[5]{12}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} 12^{3/10} - \frac{12^{4/5}}{8}$$

$$\int_{\sqrt[5]{12}}^2 \left(\frac{x^3}{2} - \sqrt{3x} \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{2\sqrt{3}}{3} x^{3/2} \right]_{\sqrt[5]{12}}^2 = \frac{16}{8} - \frac{2\sqrt{3}}{3} 2^{3/2} - \frac{12^{4/5}}{8} + \frac{2\sqrt{3}}{3} 12^{3/10}.$$

Efter lite uppsnyggande får vi att arean är $2 + \frac{5}{2}\sqrt[5]{\frac{8}{3}} - \frac{4}{3}\sqrt{6}$.

Fråga 6. Du vill värma en frusen paj i en ugn. Förändringen av pajens temperatur är proportionerlig mot skillnaden av pajens temperatur och ugnens temperatur. Ugnens temperatur är 200°C .

- (a) När du ställer in pajen i ugnen är pajens temperatur 0°C . Bestäm en formel för pajens temperatur genom att ställa upp och lösa en lämplig differentialekvation. (3p)
- (b) Efter 10 minuter är pajens temperatur 50°C . Använd detta för att bestämma proportionalitetskonstanten. (1p)

Lösning.

- (a) Låt t vara tiden mätt i minuter och $T(t)$ pajens temperatur. Från beskrivningen av hur pajens temperatur förändras får vi

$$T'(t) = k(200 - T(t)).$$

Vi vet dessutom att $T(0) = 0$. Differentialekvationen kan skrivas som $T'(t) + kT(t) = 200k$. Den integrerande faktorn blir e^{kt} och därför ges lösningarna av

$$T(t) = e^{-kt} \int 200ke^{kt} dt = e^{-kt} (200e^{kt} + C) = 200 + Ce^{-kt}.$$

Att $T(0) = 0$ ger att $C = -200$ och alltså $T(t) = 200(1 - e^{-kt})$.

- (b) Om $50 = T(10) = 200(1 - e^{-10k})$ så får vi

$$1 - e^{-10k} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-10k} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -10k = \ln(3/4) \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{1}{10}\ln(3/4).$$