
MVE426/MVE425 Matematik, del D, våren 2021
Lösningsförslag

Fråga 1. Beräkna följande integraler:

$$(a) \int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx, \quad (b) \int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx, \quad (c) \int_0^1 x^2 e^{3x} dx. \quad (7p)$$

Lösning. (a) Vi har att $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Därför får vi

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx = -\frac{1}{x - 1} + C.$$

(b) Med ett variabelbyte fås

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx &= \left[t = \ln(x) \Rightarrow dt = dx/x \right] \\ &= \int \sin(t) dt \\ &= -\cos(t) + C \\ &= -\cos(\ln(x)) + C. \end{aligned}$$

(c) Med hjälp av partiell integration får vi

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{3x} dx &= \left[x^2 \frac{e^{3x}}{3} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \frac{e^{3x}}{3} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 x e^{3x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \left[x \frac{e^{3x}}{3} \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{e^{3x}}{3} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2}{9} \left[\frac{e^{3x}}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{5e^3 - 1}{27}. \end{aligned}$$

Fråga 2. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

för alla heltal $n \geq 1$.

(5p)

Lösning. För $n = 1$ är vänsterledet och högerledet noll. Alltså gäller likheten i detta fall. Vi antar att likheten gäller för $n = m$ och ska visa att den gäller för $n = m + 1$. Vi beräknar vänsterledet för $n = m + 1$ och får

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k(k-1) &= \sum_{k=1}^m k(k-1) + (m+1)m \\ &= \frac{(m-1)m(m+1)}{3} + \frac{3(m+1)m}{3} \\ &= \frac{m(m+1)(m-1+3)}{3} \\ &= \frac{m(m+1)(m+2)}{3} \\ &= \frac{(m+1-1)(m+1)(m+1+1)}{3}.\end{aligned}$$

Det sista uttrycket är högerledet för $n = m + 1$. Enligt induktionsprincipen har vi visat påståendet för alla heltal $n \geq 1$.

Fråga 3. För den aritmetiska talföljden $a_1, a_2, \dots$ är $a_1 = 5$ och $a_2 = 11$. Bestäm talföljdens differens och beräkna

$$\sum_{k=1}^{100} a_k \tag{3p}$$

Lösning. Differensen ges av $a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$. Detta ger att $a_k = 5 + 6(k - 1)$ för alla $k \geq 1$. Summan ges av

$$\sum_{k=1}^{100} (5 + 6(k - 1)) = \sum_{k=1}^{100} 5 + 6 \sum_{k=1}^{100} (k - 1) = 500 + 6 \frac{99 \cdot 100}{2} = 30\,200.$$

Fråga 4. Lös följande differentialekvationer:

$$(a) \begin{cases} y'(x) - \tan(x)y(x) = \tan(x), & (-\pi/2 < x < \pi/2), \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{4p}$$

$$(b) y'(x) = \frac{1}{x^2 + 2} e^{y(x)}, \tag{4p}$$

$$(c) y''(x) + 4y(x) = 2x. \tag{3p}$$

Lösning. (a) Vi använder metoden med integrerande faktor: Vi har

$$\int -\tan(x) dx = \ln(\cos(x)) + C$$

och därför är vår integrerande faktor $e^{\ln(\cos(x))} = \cos(x)$. Vi multiplicerar ekvationen med den integrerande faktorn och får

$$\begin{aligned}\cos(x)y'(x) - \sin(x)y(x) &= \sin(x) \\ \left(\cos(x)y(x)\right)' &= \sin(x) \\ \cos(x)y(x) &= -\cos(x) + C \\ y(x) &= -1 + \frac{C}{\cos(x)}.\end{aligned}$$

Villkoret att $y(0) = 0$ ger att $C = 1$ och därför ges lösningen av $y(x) = 1/\cos(x) - 1$.

(b) Denna ekvation är separabel:

$$\begin{aligned}y'(x) &= \frac{1}{x^2 + 2}e^{y(x)} \\ e^{-y(x)}y'(x) &= \frac{1}{x^2 + 2} \\ e^{-y(x)}dy &= \frac{1}{x^2 + 2}dx \\ \int e^{-y}dy &= \int \frac{1}{x^2 + 2}dx \\ -e^{-y} &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2 + 1}dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) + C \\ y(x) &= -\ln\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) - C\right)\end{aligned}$$

(c) Den karakteristiska ekvationen ges av $r^2 + 4 = 0$ och dess lösningar är $r = \pm 2i$. Det betyder att lösningarna till den homogena ekvationen är

$$y_h(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x)$$

för några konstanter A och B . För att hitta en partikulärlösning kan vi ansätta $y_p(x) = Cx + D$. Men vi ser direkt att en partikulärlösning ges av $y_p = x/2$. Därför ges samtliga lösningar till ekvationen av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x) + \frac{x}{2}.$$

Fråga 5. Beräkna arean av området som begränsas av kurvorna $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ samt $x = 0$ och $x = 2\pi$. (4p)

Lösning. Vi måste lösa ekvationen $\sin(x) = \cos(x)$. Lösningarna inom $[0, 2\pi]$ ges av

$x = \pi/4$ och $x = 5\pi/4$. Vi beräknar de tre integralerna:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x)) dx &= \left[\sin(x) + \cos(x) \right]_0^{\pi/4} \\ &= \sin(\pi/4) + \cos(\pi/4) - \sin(0) - \cos(0) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(x) - \cos(x)) dx &= \left[-\cos(x) - \sin(x) \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= -\sin(5\pi/4) - \cos(5\pi/4) + \sin(\pi/4) + \cos(\pi/4) = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos(x) - \sin(x)) dx &= \left[\sin(x) + \cos(x) \right]_{5\pi/4}^{2\pi} \\ &= \sin(2\pi) + \cos(2\pi) - \sin(5\pi/4) - \cos(5\pi/4) = 1 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Den sammanlagda arean är $\sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Fråga 6. På ett bankkonto är årsräntan 2%, vilket betyder att tillväxthastigheten är proportionell mot mängden pengar på kontot, med proportionalitetskonstant $2/100$, där tiden mäts i år. Du tar dessutom ut K kronor/år från kontot. Antag att du från början har 500 000 kronor på kontot. Ställ upp och lös lämplig differentialekvation för att bestämma mängden pengar på kontot vid tiden t (räknad i enheten år). (4p)

Lösning. Vi låter $y(t)$ beteckna mängden pengar i kronor på bankkontot vid tiden t . Informationen som ges betyder att

$$y'(t) = \frac{2}{100}y(t) - K.$$

Vi löser denna ekvation med hjälp av integrerande faktor. $I = e^{-2t/100}$.

$$\begin{aligned}\left(e^{-2t/100} y(t) \right)' &= -K e^{-2t/100} \\ e^{-2t/100} y(t) &= \int -K e^{-2t/100} dt = \frac{2K}{100} e^{-2t/100} + C \\ y(t) &= \int -K e^{-2t/100} dt = \frac{2K}{100} + C e^{2t/100}\end{aligned}$$

Villkoret $y(0) = 500\,000$ ger att

$$\begin{aligned}500\,000 &= \frac{2K}{100} + C, \\ C &= 500\,000 - \frac{2K}{100}.\end{aligned}$$

Därför är

$$y(t) = \frac{2K}{100} + \left(500000 - \frac{2K}{100}\right)e^{2t/100}.$$