
MVE426/MVE425 Matematik, del D, våren 2021
Lösningsförslag

Fråga 1. Beräkna följande obestämda integraler:

(a) $\int x \sin(3x) dx$, (b) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$, (c) $\int \frac{11x + 10}{x^3 + x^2 - 20x} dx$.

Lösning. (a) Med partiell integration fås

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin(3x) dx &= \left[-x \frac{\cos(3x)}{3} \right]_0^\pi + \frac{1}{3} \int_0^\pi \cos(3x) dx \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9} \left[\sin(3x) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

(b) Genom en variabelsubstitution får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx &= \left[e^x = t \right] \\ &= \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan(t) + C = \arctan(e^x) + C. \end{aligned}$$

(c) Om vi faktorerisar nämnaren får vi $x^3 + x^2 - 20x = x(x - 4)(x + 5)$. En partialbråksuppdelning ger

$$\frac{11x + 10}{x^3 + x^2 - 20x} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{3}{x - 4} - \frac{2}{x + 5} \right).$$

Härifrån kan vi beräkna integralen:

$$\begin{aligned} \int \frac{11x + 10}{x^3 + x^2 - 20x} dx &= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{3}{x - 4} - \frac{2}{x + 5} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x - 4| - \ln|x + 5| + C. \end{aligned}$$

Fråga 2. Betrakta följande geometriska serie:

$$\frac{1}{3} + \frac{e}{9} + \frac{e^2}{27} + \dots$$

Skriv serien med summabeteckning och beräkna summan av serien.

Lösning. Med summabeteckning skrivs serien $e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (e/3)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1/3)(e/3)^{k-1}$.
Eftersom det är en geometrisk serie så ges summan av

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1/3)(e/3)^k = \frac{1/3}{1 - e/3} = \frac{1}{3 - e}.$$

Fråga 3. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Lösning. *Basfall:* $n = 1$. Då $n = 1$ ges vänsterledet av $VL = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1$ och högerledet av $HL = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. Alltså gäller likheten då $n = 1$.

Induktionssteg: Antag att likheten gäller för något heltal $m \geq 1$ och visa att likheten gäller för $n = m + 1$. Vi beräknar vänsterledet för $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} VL &= \sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^m k^2 + (m+1)^2 \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \quad (\text{enligt induktionsantagandet!}) \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\ &= \frac{(m+1)(m(2m+1) + 6(m+1))}{6} \\ &= \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6} \\ &= \frac{2(m+1)(m^2 + (7/2)m + 3)}{6} \\ &= \frac{2(m+1)((m + 7/4)^2 - 49/16 + 3)}{6} \\ &= \frac{2(m+1)((m + 7/4)^2 - 1/16)}{6} \\ &= \frac{2(m+1)(m + 7/4 - 1/4)(m + 7/4 + 1/4)}{6} \\ &= \frac{2(m+1)(m + 3/2)(m + 2)}{6} \\ &= \frac{(m+1)(2m+3)(m+2)}{6} \\ &= \frac{(m+1)((m+1)+1)(2(m+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Detta är precis högerledet för $n = m + 1$. Vi har alltså visat likheten för $n = m + 1$.

Slutsats: Enligt induktionsprincipen har vi visat att likheten gäller för alla heltal $n \geq 1$.

Fråga 4. Lös följande differentialekvationer:

(a)
$$\begin{cases} y'(x) = e^{y(x)} \tan(x), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

(b) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3x + 4,$

(c) $xy'(x) + y(x) = \sqrt{5x}.$

Lösning. (a) Ekvationen är separabel och ekvivalent med

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^y \tan(x), \\ \Leftrightarrow e^{-y} dy &= \tan(x) dx, \\ \Leftrightarrow \int e^{-y} dy &= \int \tan(x) dx, \\ \Leftrightarrow -e^{-y} &= \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln|\cos(x)| + C, \\ \Leftrightarrow -y &= \ln(C - \ln|\cos(x)|), \\ \Leftrightarrow y &= -\ln(C - \ln|\cos(x)|). \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret ger att

$$0 = y(0) = -\ln(C - \ln|\cos(0)|) = -\ln(C).$$

Detta ger att $C = 1$ och alltså är $y(x) = -\ln(1 - \ln|\cos(x)|)$.

- (b) Det karakteristiska polynomet ges av $r^2 - 2r + 1$ och det har $r = 1$ som en dubbelrot. Därför ges den homogena lösningen av $y_h(x) = (Ax + B)e^x$. För att hitta en partikulärlösning antar vi $y_p(x) = Cx + D$. Då är $y_p'(x) = C$ och $y_p''(x) = 0$. Alltså är

$$y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = -2C + Cx + D$$

och vi vill att detta ska vara lika med $3x + 4$. Då är $C = 3$ och $D - 2C = 4$ så $D = 4 + 2 \cdot 3 = 10$. Sammanfattningsvis får vi

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B)e^x + 3x + 10.$$

- (c) Notera att $x \geq 0$ eftersom vi använder roten ur $5x$. Ekvationen är en linjär differentialekvation av första ordningen så vi kan använda metoden med integrerande faktor. Men ekvationen så faktiskt redan på "rätt" sätt. Vi får

$$\begin{aligned} xy'(x) + y(x) &= \sqrt{5x}, \\ \Leftrightarrow (xy(x))' &= \sqrt{5x}, \\ \Leftrightarrow xy(x) &= \int \sqrt{5x} dx + C, \\ \Leftrightarrow y(x) &= \frac{2\sqrt{5}}{3} \sqrt{x} + \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Fråga 5. Beräkna arean av området som begränsas av graferna till $f(x) = 2x^2 + 3x$ och $g(x) = x^3 + x^2 - 9x$.

Lösning. Kurvorna skär varandra då

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 9x &= 2x^2 + 3x, \\ \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 12x &= 0, \\ \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{eller} \quad x^2 - x - 12 &= 0. \end{aligned}$$

Andragradsekvationen har lösningarna $x = -3$ samt $x = 4$. Vi får

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} \right]_{-3}^0 \\ &= - \left(\frac{(-3)^4}{4} - \frac{(-3)^3}{3} - 6 \cdot (-3)^2 \right) \\ &= - \frac{81}{4} - 9 + 6 \cdot 9 \\ &= 63 - \frac{81}{4} = \frac{45 \cdot 4 - 81}{4} = \frac{180 - 81}{4} = \frac{99}{4} \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} \int_0^4 (g(x) - f(x)) dx &= \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \frac{4^4}{4} - \frac{4^3}{3} - 6 \cdot 4^2 \\ &= 64 - \frac{64}{3} - 6 \cdot 16 = \frac{64 \cdot 3 - 64 - 96 \cdot 3}{3} = -\frac{160}{3}. \end{aligned}$$

Eftersom areor inte kan vara negativa ges den sammanlagda arean

$$\frac{99}{4} + \frac{160}{3} = \frac{3 \cdot 99 + 4 \cdot 160}{12} = \frac{937}{12}.$$

Fråga 6. En bassäng innehåller 1000 liter saltvatten. Från början finns det 20 kg salt i bassängen. Hela tiden pumpas saltvatten som innehåller 10 gram salt per liter in i bassängen med en hastighet av 10 liter per minut. Dessutom flödar det ut ur bassängen 10 liter saltvatten per minut. Saltvattnet kan genom omrörning hela tiden vara fullständigt blandat. Beräkna hur mycket salt som finns i bassängen efter 100 minuter.

Lösning. Vi låter $y(t)$ beteckna mängden salt i kg i bassängen efter t minuter. Vi får att $y(0) = 20$. Den övriga informationen betyder att

$$y'(t) = \frac{1}{10} - \frac{y(t)}{100}.$$

Vi löser denna differentialekvation:

$$\begin{aligned} y'(t) + \frac{1}{100}y(t) &= \frac{1}{10} \\ e^{t/100}y'(t) + \frac{e^{t/100}}{100}y(t) &= \frac{e^{t/100}}{10} \\ (e^{t/100}y(t))' &= \frac{e^{t/100}}{10} \\ e^{t/100}y(t) &= \int \frac{e^{t/100}}{10} dt = 10e^{t/100} + C \\ y(t) &= 10 + Ce^{-t/100} \end{aligned}$$

Vi får också att $20 = y(0) = 10 + C$ vilket ger att $C = 10$. Därför är

$$y(t) = 10 + 10e^{-t/100}$$

Vi får då att $y(100) = 10 + 10e^{-1}$.