

Examinator: Mårten Wadenbäck**Telefonvakt:** Mårten Wadenbäck, telefon: x3584**Hjälpmedel:** Penna, suddgummi, linjal, pennvässare

För betyget tre krävs minst 20 poäng, för betyget fyra krävs minst 32 poäng, och för betyget fem krävs minst 42 poäng. Lösningar publiceras på kurshemsidan efter skrivningen. Resultatet meddelas i LADOK, och bör synas senast 2019-06-10 (*troligen* 2019-06-07). Tid och plats för visning kommer att anslås på kurshemsidan senast samma datum.

OBS: Skriv tydligt och luftigt, på *en* sida av varje pappersark. Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra). Motivera dina svar väl—det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ibland ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker. Numrera de inlämnade bladen *efter* att du sorterat dem! Använd inte röd penna, men gärna annan färg.

-
1. Beräkna följande integraler (förenkla så långt det går):

$$(a) \int \frac{\cos(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx, \quad (b) \int \ln(1 - x) dx, \quad (c) \int \frac{dx}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x}. \quad (9p)$$

2. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} = 1 + (n-1) \cdot 2^n$ för alla heltal $n \geq 1$. (6p)

3. Skriv den geometriska serien

$$2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$$

med summabeteckning, och avgör för vilket/vilka x seriens summa är lika med $\frac{1}{x} - 3$. (5p)

4. Bestäm alla funktioner $y(x)$ som uppfyller:

$$(a) \quad y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}, \quad (b) \quad y' + e^x y = e^x, \quad (c) \quad y'' + 4y = 32x^2 - 8. \quad (12p)$$

5. Låt $y(t)$ vara mängden fiskmat (mätt i gram) som finns i ett visst akvarium vid tiden t (mätt i timmar). De glupska akvariefiskarna äter upp maten i en takt som i varje ögonblick är proportionell mot mängden mat som finns kvar just då. Vid tiden $t = 0$ fanns ingen mat alls, men därefter tillförs ny mat i varje ögonblick i takten $10e^{-t/24}$ gram per timme. Ställ upp en differentialekvation som beskriver mängden fiskmat i akvariet. Använd begynnelsevillkoret för att bestämma $y(t)$.

(Svaret får lov att innehålla den okända proportionalitetskonstanten, men inga andra okända konstanter.) (6p)

6. Bestäm volymen av rotationskroppen som uppstår då kurvan $y = x^2\sqrt{1-x^2}$ (för $x \geq 0$) roteras kring x -axeln. (4p)

7. Bevisa att om F och G är primitiva funktioner till f , så är $G(x) = F(x) + C$. (4p)

8. Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. (4p)

Lycka till!