

1. (a) Ett variabelbyte ger

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= \left[u = 1 + \sqrt{x} \right] \left[du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right] = 2 \int \cos u du = \\ &= 2 \sin u + C = 2 \sin(1 + \sqrt{x}) + C.\end{aligned}$$

Svar: Integralen blir $2 \sin(1 + \sqrt{x}) + C$.

- (b) Partialintegration ger

$$\begin{aligned}\int \ln(1-x) dx &= x \ln(1-x) - \int x \cdot \frac{-1}{1-x} dx = \\ &= x \ln(1-x) + \int \frac{x}{1-x} dx = [\text{polynomdivision}] = \\ &= x \ln(1-x) + \int \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right) dx = \\ &= x \ln(1-x) - x - \ln(1-x) + C.\end{aligned}$$

Svar: Integralen blir $x \ln(1-x) - x - \ln(1-x) + C$.

- (c) Vi har att göra med en rationell funktion, och täljarpolynomets grad är lägre än nämnarpolynomets (vi slipper polynomdivision). Faktorisering av nämnaren i reella faktorer ger
- $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x = x(x+1)^3$
- . En lämplig ansats för partialbråk är

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)^3} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{(x+1)^3} = \\ &= \frac{A(x+1)^3 + Bx(x+1)^2 + Ex(x+1) + Fx}{x(x+1)^3} = \\ &= \frac{A(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + B(x^3 + 2x^2 + x) + E(x^2 + x) + Fx}{x(x+1)^3},\end{aligned}$$

där identifiering av koefficienter ger

$$\begin{array}{lcl} x^3 : & \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + 2B + E = 0 \\ 3A + B + E + F = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ E = -1 \\ F = -1. \end{cases} \\ x^2 : & & \\ x : & & \\ \text{konstant} : & \begin{cases} A = 1 \end{cases} & \end{array}$$

Integralen ges då av

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx = \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C.\end{aligned}$$

Svar: Integralen blir $\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C$.

2. Vi betecknar

$$\text{VL}(n) = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} \quad \text{och} \quad \text{HL}(n) = 1 + (n-1) \cdot 2^n.$$

Basfall: Eftersom

$$VL(1) = 1 \cdot 2^0 = 1 \quad \text{och} \quad HL(1) = 1 + (1 - 1) \cdot 2^0 = 1$$

gäller basfallet $VL(1) = HL(1)$.

Induktionssteget: Antag att $VL(p) = HL(p)$ för något visst $p \geq 1$. Då blir

$$\begin{aligned} VL(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} k \cdot 2^{k-1} = (p+1) \cdot 2^p + \sum_{k=1}^p k \cdot 2^{k-1} = (p+1) \cdot 2^p + VL(p) = \\ &= (p+1) \cdot 2^p + HL(p) = (p+1) \cdot 2^p + 1 + (p-1) \cdot 2^p = \\ &= 1 + 2^p(p+1+p-1) = 1 + p \cdot 2^{p+1} = HL(p+1), \end{aligned}$$

där de coelinblå deluttrycken ovan är lika enligt antagandet att $VL(p) = HL(p)$.

Vi har ett giltigt basfall och ett induktionssteg, och *induktionsprincipen* ger därför att $VL(n) = HL(n)$ är sann för alla $n \geq 1$.

3. Vi avläser första termen $a_1 = 2x$ och får seriens kvot till $q = \frac{4x^2}{2x} = 2x$, så att $a_n = a_1 q^{n-1} = 2x \cdot (2x)^{n-1}$. Serien kan nu skrivas

$$2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2x \cdot (2x)^{k-1},$$

och satsen om geometriska serien säger att om $-1 < 2x < 1$ så är serien konvergent och har summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2x \cdot (2x)^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2x}{1-2x}.$$

Om detta skall vara lika med $\frac{1}{x} - 3$ måste

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1-2x} = \frac{1}{x} - 3 &\Leftrightarrow 2x^2 = 1 - 2x - 3x(1-2x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{8} \pm \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

dvs $x = \frac{1}{4}$ eller $x = 1$. Av dessa är det endast $x = \frac{1}{4}$ som uppfyller konvergenskravet $-1 < 2x < 1$, så det är enda giltiga lösningen.

Svar: Serien skrivs $\sum_{k=1}^{\infty} 2x \cdot (2x)^{k-1}$ och har summan $\frac{1}{x} - 3$ precis då $x = \frac{1}{4}$.

4. (a) Ekvationen är separabel. Konstanta lösningar saknas, eftersom $y' > 0$ (sträng olikhet). Vi kan skriva om ekvationen som

$$\frac{y'(x)}{1+y(x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Genom att integrera båda sidor med avseende på x får vi

$$\int \frac{y'(x)}{1+y(x)^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2},$$

där (om vi sparar konstanten till höger sida)

$$\int \frac{y'(x)}{1+y(x)^2} dx = \left[\frac{y = y(x)}{dy = y'(x) dx} \right] = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y$$

och

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

för någon konstant C . Det gäller alltså att

$$\arctan y = \arctan x + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \tan(\arctan x + C).$$

Svar: Funktionen ges av $y(x) = \tan(\arctan x + C)$, där C är en konstant.

- (b) Ekvationen är lineär och av första ordningen, och vi löser den därför med metoden som bygger på *integrerande faktorn*.

Integrerande faktorn blir I.F. $= e^{e^x}$, och denna skall multipliceras in på båda sidor i ekvationen. Detta leder till

$$\underbrace{e^{e^x} y' + e^{e^x} \cdot e^x y}_{\text{produktderivata}} = e^x \cdot e^{e^x} \quad \Leftrightarrow \quad D[e^{e^x} y] = e^x \cdot e^{e^x} \quad \Leftrightarrow$$
$$e^{e^x} y = \int e^x \cdot e^{e^x} dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \end{array} \right] = \int e^u du = e^u + C = e^{e^x} + C \quad \Leftrightarrow$$
$$y(x) = 1 + Ce^{-e^x},$$

där C är en konstant.

Svar: Funktionen ges av $y(x) = 1 + Ce^{-e^x}$, där C är en konstant.

- (c) Här har vi en inhomogen lineär ekvation av ordning två med konstanta koefficienter. Alla lösningar kommer att vara på formen $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, där $y_h(x)$ är allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och $y_p(x)$ är någon partikulärlösning.

För att hitta $y_h(x)$ löser vi *karaktäristiska ekvationen*:

$$r^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm 2i.$$

Eftersom karaktäristiska ekvationen har icke-reella rötter blir homogena lösningen

$$y_h(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x).$$

En partikulärlösning $y_p(x)$ kan vi få genom en lämplig ansats. Eftersom högerledet är ett andragradspolynom ansätter vi ett andragradspolynom:

$$y_p(x) = Ex^2 + Fx + G \quad \Rightarrow \quad y_p'(x) = 2Ex + F \quad \Rightarrow \quad y_p''(x) = 2E.$$

Insättning i ekvationen ger

$$2E + 4Ex^2 + 4Fx + 4G = 32x^2 - 8.$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{array}{lll} x^2 : & \left\{ \begin{array}{l} 4E = 32 \\ 4F = 0 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E = 8 \\ F = 0 \end{array} \right. \\ x : & & \\ \text{konstant} : & \left\{ \begin{array}{l} 2E + 4G = -8 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} F = -6. \end{array} \right. \end{array}$$

En partikulärlösning är alltså $y_p(x) = 8x^2 - 6$.

Alla lösningar till differentialekvationen fås som

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x) + 8x^2 - 6,$$

där C_1 och C_2 är konstanter.

Svar: Lösningarna ges av $y(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x) + 8x^2 - 6$, där A och B är konstanter.

5. Differentialekvationen för mängden fiskmat $y(t)$ blir

$$y'(t) = -ky(t) + 10e^{-t/24} \Leftrightarrow y'(t) + ky(t) = 10e^{-t/24},$$

med begynnelsevärdet $y(0) = 0$, där $k > 0$ är en konstant.

Detta är en linär differentialekvation av första ordningen, och vi löser den med hjälp av integrerande faktorn, I.F. $= e^{kt}$. Denna multipliceras in i bägge led i ekvationen, och vi får då

$$e^{kt}y'(t) + e^{kt}ky(t) = 10e^{-t/24} \cdot e^{kt} \Leftrightarrow D[e^{kt}y(t)] = 10e^{t(24k-1)/24},$$

så

$$e^{kt}y(t) = 10 \int e^{t(24k-1)/24} dt = \frac{10e^{t(24k-1)/24}}{(24k-1)/24} + C = \frac{240e^{kt} \cdot e^{-t/24}}{24k-1} + C.$$

Detta ger

$$y(t) = \frac{240e^{-t/24}}{24k-1} + Ce^{-kt}.$$

Begynnelsevärdet använder vi för att få

$$0 = y(0) = \frac{240}{24k-1} + C \Leftrightarrow C = -\frac{240}{24k-1}.$$

Svar: Mängden fiskmat vid tiden t ges av $\frac{240}{24k-1}(e^{-t/24} - e^{-kt})$, för en positiv konstant k .

6. Funktionen som anger kurvan är definierad och positiv för $0 \leq x \leq 1$, så rotationskroppen sträcker sig från noll till ett. Skivformeln ger därför volymen

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x^2 \sqrt{1-x^2})^2 dx = \pi \int_0^1 x^4(1-x^2) dx = \pi \int_0^1 (x^4 - x^6) dx = \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) - 0 = \frac{2\pi}{35}. \end{aligned}$$

Svar: Arean är $A = \frac{2\pi}{35}$.

7. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 4.

8. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 1.