

Examinator: Mårten Wadenbäck**Telefonvakt:** Mårten Wadenbäck, telefon: x3584**Hjälpmedel:** Penna, suddgummi, linjal, pennvässare

För betyget tre krävs minst 20 poäng, för betyget fyra krävs minst 32 poäng, och för betyget fem krävs minst 42 poäng. Lösningar publiceras på kurshemsidan efter skrivningen. Resultatet meddelas i LADOK, och bör synas senast 2019-05-29. Tid och plats för visning kommer att anslås på kurshemsidan senast samma datum.

OBS: Skriv tydligt och luftigt, på *en* sida av varje pappersark. Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra). Motivera dina svar väl—det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ibland ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker. Numrera de inlämnade bladen *efter* att du sorterat dem! Använd inte röd penna, men gärna annan färg.

-
1. Beräkna följande integraler (förenkla så långt det går):

$$(a) \int x \arctan x \, dx, \quad (b) \int e^{2x} \sqrt{1 + e^{2x}} \, dx, \quad (c) \int \frac{5x^2 - 6x - 3}{x^4 - 1} \, dx. \quad (9p)$$

2. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ för alla heltal $n \geq 1$. (6p)

3. Skriv den geometriska serien

$$7 + 14e^{-2x} + 28e^{-4x} + \dots$$

med summabeteckning, och avgör för vilket/vilka x seriens summa är 9. (5p)

4. Bestäm alla funktioner $y(x)$ som, då $x > 0$, uppfyller:

$$(a) \quad y' = 4\sqrt{y} \cos(2x), \quad (b) \quad y' + \left(2x + \frac{1}{x}\right)y = 2, \quad (c) \quad y'' - 5y' + 6y = 4e^{4x}. \quad (12p)$$

5. Newtons avsvalningslag säger att förändringshastigheten för ett litet föremåls temperatur är proportionell mot skillnaden mellan föremålets temperatur och omgivningens.

Låt $T(t)$ vara temperaturen av ett visst litet föremål vid tiden t , och antag att $T(0) = 0$. Vid tiden $t = 0$ stoppar vi in föremålet i en ugn vars temperatur är $T_{\text{ugn}}(t) = 20 + t$ (ugnen, som blir föremålets omgivning, värms alltså upp). Ställ upp en differentialekvation för funktionen $T(t)$. Lös differentialekvationen för att bestämma funktionen $T(t)$.

(Svaret får lov att innehålla den okända proportionalitetskonstanten, men inga andra okända konstanter.) (6p)

6. Bestäm arean av det begränsade område som begränsas av kurvorna $y = 3 - x^2$ och $y = \frac{x}{2}$. (4p)

7. Bevisa att om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller det att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (4p)

8. Bevisa formeln för partialintegration. (4p)