

1. (a) Partialintegration ger

$$\begin{aligned}\int x \arctan x \, dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = [\text{polynomdivision}] = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} + C.\end{aligned}$$

Svar: Integralen blir $\frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} + C$.

(b) Ett variabelbyte ger

$$\begin{aligned}e^{2x} \sqrt{1+e^{2x}} \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = 1 + e^{2x} \\ du = 2e^{2x} \, dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{(1+e^{2x})^{3/2}}{3} + C.\end{aligned}$$

Svar: Integralen blir $\frac{(1+e^{2x})^{3/2}}{3} + C$.

(c) Vi har att göra med en rationell funktion, och täljarpolynomets grad är lägre än nämnarpolynomets (vi slipper polynomdivision). Faktorisering av nämnaren i reella faktorer ger $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. En lämplig ansats för partialbråk är

$$\begin{aligned}\frac{5x^2 - 6x - 3}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{A(x^2 + 1)(x + 1) + B(x^2 + 1)(x - 1) + (Ex + F)(x^2 - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{A(x^3 + x^2 + x + 1) + B(x^3 - x^2 + x - 1) + E(x^3 - x) + F(x^2 - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)},\end{aligned}$$

där identifiering av koefficienter ger

$$\begin{array}{lcl} x^3 : & \begin{cases} A + B + E = 0 \\ A - B + F = 5 \\ A + B - E = -6 \\ A - B - F = -3 \end{cases} & \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \\ E = 3 \\ F = 4. \end{cases} \\ x^2 : & & \\ x : & & \\ \text{konstant} : & & \end{array}$$

Integralen ges då av

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2 - 6x - 3}{x^4 - 1} \, dx &= \int \left(-\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} + \frac{3x + 4}{x^2 + 1} \right) \, dx = \\ &= -\ln|x - 1| - 2\ln|x + 1| + \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx + 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= -\ln|x - 1| - 2\ln|x + 1| + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + 4 \arctan x + C.\end{aligned}$$

Svar: Integralen blir $-\ln|x - 1| - 2\ln|x + 1| + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + 4 \arctan x + C$.

2. Vi betecknar

$$\text{VL}(n) = \sum_{k=1}^n k^3 \quad \text{och} \quad \text{HL}(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Basfall: Eftersom

$$\text{VL}(1) = 1^3 = 1 \quad \text{och} \quad \text{HL}(1) = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$$

gäller basfallet $\text{VL}(1) = \text{HL}(1)$.

Induktionssteget: Antag att $\text{VL}(p) = \text{HL}(p)$ för något visst $p \geq 1$. Då blir

$$\begin{aligned} \text{VL}(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} k^3 = (p+1)^3 + \sum_{k=1}^p k^3 = (p+1)^3 + \text{VL}(p) = \\ &= (p+1)^3 + \text{HL}(p) = (p+1)^3 + \frac{p^2(p+1)^2}{4} = \\ &= (p+1)^2 \left(\frac{p^2}{4} + p + 1 \right) = (p+1)^2 \cdot \frac{p^2 + 4p + 4}{4} = \\ &= \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} = \text{HL}(p+1), \end{aligned}$$

där de så fagert gyllenglänsande deluttrycken ovan är lika enligt antagandet att $\text{VL}(p) = \text{HL}(p)$.

Vi har ett giltigt basfall och ett induktionssteg, och *induktionsprincipen* ger därför att $\text{VL}(n) = \text{HL}(n)$ är sann för alla $n \geq 1$.

3. Vi avläser första termen $a_1 = 7$ och får seriens kvot till $q = \frac{14e^{-2x}}{7} = 2e^{-2x}$, så att $a_n = a_1 q^{n-1} = 7 \cdot (2e^{-x})^{n-1}$. Serien kan nu skrivas

$$7 + 14e^{-2x} + 28e^{-4x} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 7 \cdot (2e^{-x})^{k-1},$$

och satsen om geometriska serien säger att om $-1 < e^{-2x} < 1$ så är serien konvergent och har summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} 7 \cdot (2e^{-x})^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{7}{1-2e^{-2x}}.$$

Om detta skall vara lika med 9 måste

$$\begin{aligned} \frac{7}{1-2e^{-2x}} = 9 &\Leftrightarrow 7 = 9 - 18e^{-2x} &\Leftrightarrow 18e^{-2x} = 2 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{9} &\Leftrightarrow -2x = \ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln 9 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \ln 3, \end{aligned}$$

och lyckligtvis är $-1 < 2e^{-2\ln 3} = 2 \cdot 3^{-2} = \frac{2}{9} < 1$, så serien är konvergent för detta x .

Svar: Serien skrivs $\sum_{k=1}^{\infty} 7 \cdot (2e^{-x})^{k-1}$ och har summan 9 då $x = \ln 3$.

4. (a) Ekvationen är separabel. En konstant lösning ges av $y(x) = 0$ för alla $x > 0$. Om däremot $y \neq 0$ kan vi skriva om ekvationen som

$$\frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} = 2\cos(2x).$$

Genom att integrera båda sidor med avseende på x får vi

$$\int \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} dx = \int 2\cos(2x) dx,$$

där (om vi sparar konstanten till höger sida)

$$\int \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} dx = \left[\begin{array}{l} y = y(x) \\ dy = y'(x) dx \end{array} \right] = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y}$$

och

$$\int 2\cos(2x) dx = \sin(2x) + C$$

för någon konstant C . Det gäller alltså att

$$\sqrt{y} = \sin(2x) + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = (\sin(2x) + C)^2.$$

(Här måste $\sin(2x) + C \geq 1$ för att det skall fungera.)

Svar: Funktionen ges av $y(x) = (\sin(2x) + C)^2$, där C är en konstant, eller av $y(x) = 0$.

- (b) Ekvationen är linjär och av första ordningen, och vi löser den därför med metoden som bygger på *integrerande faktorn*.

Integrerande faktorn blir

$$\text{I.F} = e^{x^2 + \ln x} = e^{x^2} \cdot e^{\ln x} = xe^{x^2},$$

och denna skall multipliceras in på båda sidor i ekvationen. Detta leder till

$$\underbrace{xe^{x^2}y' + xe^{x^2}\left(2x + \frac{1}{x}\right)y}_{\text{produktderivata}} = 2xe^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad D[xe^{x^2}y] = 2xe^{x^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$xe^{x^2}y = \int 2xe^{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{array} \right] = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C \quad \Leftrightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{Ce^{-x^2}}{x},$$

där C är en konstant.

Svar: Funktionen ges av $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{Ce^{-x^2}}{x}$, där C är en konstant.

- (c) Här har vi en inhomogen linjär ekvation av ordning två med konstanta koefficienter. Alla lösningar kommer att vara på formen $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, där $y_h(x)$ är allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och $y_p(x)$ är någon partikulärlösning.

För att hitta $y_h(x)$ löser vi *karaktäristiska ekvationen*:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Eftersom karakteristiska ekvationen har två olika rötter blir homogena lösningen

$$y_h(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}.$$

En partikulärlösning $y_p(x)$ kan vi få genom en lämplig ansats. Eftersom högerledet är en exponentialfunktion ansätter vi en liknande exponentialfunktion:

$$y_p(x) = A e^{4x} \Rightarrow y_p'(x) = 4A e^{4x} \Rightarrow y_p''(x) = 16A e^{4x}.$$

Insättning i ekvationen ger

$$16A e^{4x} - 5 \cdot 4A e^{4x} + 6A e^{4x} = 4e^{4x} \Leftrightarrow 2A e^{4x} = 4e^{4x} \Leftrightarrow A = 2.$$

En partikulärlösning är alltså $y_p(x) = 2e^{4x}$.

Alla lösningar till differentialekvationen fås som

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + 2e^{4x},$$

där C_1 och C_2 är konstanter.

Svar: Lösningarna ges av $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + 2e^{4x}$, där C_1 och C_2 är konstanter.

5. Differentialekvationen för temperaturen $T(t)$ blir

$$T'(t) = -k(T(t) - T_{\text{ugn}}(t)) \Leftrightarrow T'(t) + kT(t) = k(20 + t),$$

med begynnelsevärdet $T(0) = 0$, där $k > 0$ är en konstant.

Detta är en linär differentialekvation av första ordningen, och vi löser den med hjälp av integrerande faktorn, I.F. $= e^{kt}$. Denna multipliceras in i bägge led i ekvationen, och vi får då

$$e^{kt} T'(t) + e^{kt} kT(t) = k(20 + t)e^{kt} \Leftrightarrow D[e^{kt} T(t)] = k(20 + t)e^{kt},$$

så

$$e^{kt} T(t) = \int k(20 + t)e^{kt} dt = (20 + t)e^{kt} - \int 1 \cdot e^{kt} dt = (20 + t)e^{kt} - \frac{e^{kt}}{k} + C.$$

Detta ger

$$T(t) = 20 + t - \frac{1}{k} + C e^{-kt}.$$

Begynnelsevärdet använder vi för att få

$$0 = T(0) = 20 - \frac{1}{k} + C \Leftrightarrow C = \frac{1 - 20k}{k}.$$

Svar: Föremålets temperatur ges av $T(t) = 20 + t - \frac{1}{k} + \frac{1 - 20k}{k} \cdot e^{-kt}$, för en positiv materialkonstant k .

6. Vi börjar med att bestämma var kurvorna skär varandra:

$$3 - x^2 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{x}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 3} = -\frac{1}{4} \pm \frac{7}{4},$$

dvs då $x = -2$ och $x = \frac{3}{2}$. På intervallet $[-2, \frac{3}{2}]$ ligger kurvan $y = 3 - x^2$ överst (testa t.ex att sätta in $x = 0$). Den sökta arean är alltså

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{\frac{3}{2}} \left(3 - x^2 - \frac{x}{2} \right) dx = \left[3x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} \right]_{-2}^{\frac{3}{2}} = \\ &= \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{8} - \frac{9}{16} \right) - \left(-6 + \frac{8}{3} - 1 \right) = \frac{45}{16} - \frac{8}{3} + 7 = \frac{135}{48} - \frac{128}{48} + \frac{336}{48} = \frac{343}{48}. \end{aligned}$$

Svar: Arean är $A = \frac{343}{48}$.

7. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 3.
8. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 7.