

Tentamen
MVE426/MVE425/MVE640, Matematik, del C
2023-08-17, 14.00–18.00

Telefonvakt: Anna Karlsson, 0721-575850.

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: 3:a: 20-31 poäng, 4:a: 32-41 poäng, 5:a: 42-50 poäng.

Resultatet meddelas i LADOK.

OBS! Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida). Numrera de inlämnade bladen *efter* att du har sorterat dem! Använd inte röd penna!

1. Derivera följande funktionsuttryck med avseende på x . Ange vilka deriveringsregler du använder och var i dina kalkyler de används. Svara på enklast möjliga form.

(a) $\frac{x^3 - x}{2 - x}$ (b) $\ln(\sin(x^2))$ (c) $x(1 + x) \arcsin(x)$ (7p)

2. Betrakta kurvan $y = e^{-x^2}$. Bestäm ekvationerna för kurvans tangent och normal i punkten där $x = 1$. (6p)

3. Bestäm största och minsta värde för $f(x) = \cos(x)e^x$ på intervallet $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$. (6p)

4. Skissa grafen till en funktion $f(x)$ som stämmer överens med nedanstående teckenschema för dess derivata och andraderivata. Markera i figuren var funktionen har lokala extrempunkter, terrasspunkter respektive inflexionspunkter.

x	$<$	0	$<$	1	$<$	2	$<$	3	$<$	4	$<$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$

(4p)

5. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$.

- (a) Bestäm definitionsmängden och eventuella lodräta asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Motivera väl! (3p)

- (b) Bestäm eventuella vågräta och/eller sneda asymptoter till kurvan $y = f(x)$. (2p)

- (c) Bestäm eventuella kritiska punkter och gör ett teckenschema för derivatan. (3p)

- (d) Avgör i vilka intervall som kurvan $y = f(x)$ är konvex respektive konkav. (3p)

- (e) Skissa kurvan $y = f(x)$. All information från föregående deluppgifter ska tydligt framgå av grafen. (2p)

6. Ett par polaroidglasögon har gått sönder och en student håller upp de två glaslinserna i en rät linje, den ena efter den andra, mot solljuset. Mängden ljus som flödar igenom linserna beror på hur de är roterade relativt varandra. Om den relativa vinkeln mellan dem är θ ges mängden ljus I som kommer igenom av $I = I_o(\cos \theta)^2/2$, där I_o är den infallande ljusstyrkan. Hur snabbt och i vilken riktning vrider studenten på den ena linsen, om den andra är stilla, ljusflödet minskar med en hastighet som motsvarar en halvering på en sekund, och den relativa vinkeln mellan de två linserna är $\pi/4$ radianer? (4p)

7. (a) Definiera vad som menas med en *växande* funktion. (2p)
- (b) Visa att $D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$. (4p)
8. Formulera och bevisa satsen om sambandet mellan kontinuitet och deriverbarhet. (4p)

Lycka till!