

1 Uppgift 1

Uppgift: Derivera följande funktionsuttryck med avseende på x . Ange vilka deriveringsregler du använder och var i dina kalkyler de används. Svara på enklast möjliga form.

$$(a) \frac{x^3 - x}{2 - x} \quad (b) \ln(\sin(x^2)) \quad (c) x(1 + x) \arcsin(x)$$

Lösning:

$$\begin{aligned} a) \quad D \left[\frac{x^3 - x}{2 - x} \right] &= [\text{kvotregeln}] = \frac{(3x^2 - 1)(2 - x) - (x^3 - x)(-1)}{(2 - x)^2} = \frac{(3x^2 - 1)(2 - x) + (x^3 - x)}{(2 - x)^2} = \\ &= \frac{6x^2 - 2 - 3x^2 + x + x^3 - x}{(2 - x)^2} = \frac{2(-x^3 + 3x^2 - 1)}{(2 - x)^2} = -\frac{2(x^3 - 3x^2 + 1)}{(2 - x)^2} \\ b) \quad D [\ln(\sin(x^2))] &= [\text{kedjeregeln}] = \frac{1}{\sin(x^2)} \cos(x^2) 2x = 2x \cot(x^2) \\ c) \quad D [x(1 + x) \arcsin(x)] &= D [(x + x^2) \arcsin(x)] = [\text{produktregeln}] = \\ &= (1 + 2x) \arcsin(x) + (x + x^2) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 + 2x) \arcsin(x) + \frac{x(1 + x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \\ &= (1 + 2x) \arcsin(x) + x \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} a) \quad D \left[\frac{x^3 - x}{2 - x} \right] &= -\frac{2(x^3 - 3x^2 + 1)}{(2 - x)^2} \quad b) \quad D [\ln(\sin(x^2))] = 2x \cot(x^2) \\ c) \quad D [x(1 + x) \arcsin(x)] &= (1 + 2x) \arcsin(x) + x \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \end{aligned}$$

2 Uppgift 2

Uppgift: Betrakta kurvan $y = e^{-x^2}$. Bestäm ekvationerna för kurvans tangent och normal i punkten där $x = 1$.

Lösning: För kurvan $y = f(x)$ gäller att tangenten i punkten där $x = a$ har ekvationen

$$y_T = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (2.1)$$

Vi har

$$f(x) = e^{-x^2} \quad (2.2)$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2} \quad (2.3)$$

så för $a = 1$ gäller att

$$\begin{aligned} f(a) &= f(1) \stackrel{(2.2)}{=} e^{-1} = \frac{1}{e} \\ f'(a) &= f'(1) \stackrel{(2.3)}{=} -2e^{-1} = -\frac{2}{e} \end{aligned}$$

och från (2.1) har vi därför att den efterfrågade tangentens ekvation ges av

$$y_T = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x - 1).$$

När $f'(a) \neq 0$ ges normalens ekvation (för kurvan $y = f(x)$ i punkten där $x = a$) av

$$y_N = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

så den efterfrågade normalens ekvation ges av

$$y_N = \frac{1}{e} + \frac{e}{2}(x - 1)$$

Svar: Tangentens ekvation är $y_T = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x - 1)$ och normalens ekvation är $y_N = \frac{1}{e} + \frac{e}{2}(x - 1)$.

3 Uppgift 3

Uppgift: Bestäm största och minsta värde för $f(x) = \cos(x)e^x$ på intervallet $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

Lösning: Funktionen

$$f(x) = \cos(x)e^x, \quad D_f = \left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

är kontinuerlig på det slutna intervallet $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$. Satsen om största och minsta värde ger därför att $f(x)$ antar ett största och minsta värde på $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

Kandidater till största och minsta värde är randpunkter, singulära punkter och kritiska punkter. Randpunkterna är $x \in \{-\pi, \frac{3\pi}{2}\}$ med

$$f(-\pi) = -e^{-\pi}, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0. \quad (3.1)$$

Dessutom gäller att

$$f'(x) = -\sin(x)e^x + \cos(x)e^x = (\cos(x) - \sin(x))e^x, \quad D_{f'} = \left(-\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

så singulära punkter saknas. De kritiska punkterna ges av

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\cos(x) - \sin(x))e^x = 0 \xLeftrightarrow{e^x > 0} \cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

vilket ger oss tre kritiska punkter via

$$x \in D_{f'} \Rightarrow x_1 = -\frac{3\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{5\pi}{4}$$

med

$$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)e^{-\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}}. \quad (3.2a)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}. \quad (3.2b)$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)e^{\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}}. \quad (3.2c)$$

Det största värdet funktionen antar ges av det enda värdet som är större än noll i ekvationerna (3.1) och (3.2)

$$\Rightarrow \max_{x \in D_f} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$$

och det minsta värdet ges av det negativa värdet med störst exponent ($e > 2, \pi > 3$):

$$\min_{x \in D_f} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}}.$$

Svar: $\min_{x \in D_f} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}}$ och $\max_{x \in D_f} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}.$

4 Uppgift 4

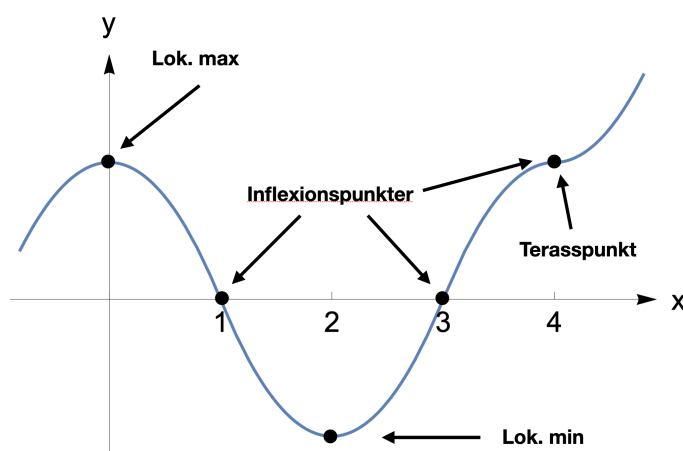
Uppgift: Skissa grafen till en funktion $f(x)$ som stämmer överens med nedanstående teckenschema för dess derivata och andraderivata. Markera i figuren var funktionen har lokala extrempunkter, terasspunkter respektive inflexionspunkter.

x	$<$	0	$<$	1	$<$	2	$<$	3	$<$	4	$<$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$

Lösning (valfritt mellansteg):

x	$<$	0	$<$	1	$<$	2	$<$	3	$<$	4	$<$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\curvearrowright$	$f(0)$	$\curvearrowleft$	$f(1)$	$\curvearrowleft$	$f(2)$	$\curvearrowright$	$f(3)$	$\curvearrowright$	$f(4)$	$\curvearrowright$

Svar:



5 Uppgift 5

Uppgift: Betrakta funktionen $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$.

- Bestäm definitionsmängden och eventuella lodräta asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Motivera väl!
- Bestäm eventuella vågräta och/eller sneda asymptoter till kurvan $y = f(x)$.
- Bestäm eventuella kritiska punkter och gör ett teckenschema för derivatan.
- Avgör i vilka intervall som kurvan $y = f(x)$ är konvex respektive konkav.
- Skissa kurvan $y = f(x)$. All information från föregående deluppgifter ska tydligt framgå av grafen.

Lösning:

a)

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{2x^3}{(x+1)(x-1)} \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

Eftersom

$$2x^3 > 0 \quad \text{då} \quad x > 0 \quad \text{och} \quad 2x^3 < 0 \quad \text{då} \quad x < 0 \quad (5.1)$$

samt

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\rightarrow 0^+, \quad \text{då} \quad x \rightarrow 1^+ \quad \text{och då} \quad x \rightarrow -1^- \\ x^2 - 1 &\rightarrow 0^-, \quad \text{då} \quad x \rightarrow 1^- \quad \text{och då} \quad x \rightarrow -1^+ \end{aligned}$$

gäller att

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1} \rightarrow \infty \quad \text{då } x \rightarrow 1^+ \quad \text{och då } x \rightarrow -1^+$$

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1} \rightarrow -\infty \quad \text{då } x \rightarrow 1^- \quad \text{och då } x \rightarrow -1^-$$

$\Rightarrow x = 1$ är lodrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \rightarrow 1$ och $x = -1$ är lodrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \rightarrow -1$.

b) För sned asymptot $y = kx + m$ betraktar vi

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2}{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow 2 = k, \quad \text{då } x \rightarrow \pm\infty$$

$$f(x) - kx = \frac{2x^3}{x^2 - 1} - 2x = \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{x - \frac{1}{x}} \rightarrow 0 = m, \quad \text{då } x \rightarrow \pm\infty$$

$\Rightarrow y = 2x$ är sned asymptot till $y = f(x)$ då $x \rightarrow \pm\infty$.

c)

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 - 1) - 2x^3(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

D_f är ett öppet intervall, så randpunkter saknas. $D_{f'} = D_f$, så singulära punkter saknas. Kritiska punkter:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm\sqrt{3}\}$$

så $x \in \{0, \pm\sqrt{3}\}$ är kritiska punkter.

Tecknet på $f'(x)$ bestäms av faktorn $(x^2 - 3)$:

$$f'(x) > 0, \quad \text{då } x \in D_f \quad \text{och } x^2 > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$$

Pss $f'(x) < 0$ då $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \setminus \{0\}$.

Teckenschema:

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$

med $f(0) = 0$ och $f(\pm\sqrt{3}) = \pm 3\sqrt{3}$.

d)

$f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ är konvex, och $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ är konkav.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2 - 1)^2} \right] = \frac{(8x^3 - 12x)(x^2 - 1)^2 - (2x^4 - 6x^2)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(8x^3 - 12x)(x^2 - 1) - 4x(2x^4 - 6x^2)}{(x^2 - 1)^3} = 4x \frac{(2x^2 - 3)(x^2 - 1) - (2x^4 - 6x^2)}{(x^2 - 1)^3} = \\ &= 4x \frac{2x^4 - 5x^2 + 3 - 2x^4 + 6x^2}{(x^2 - 1)^3} = 4x \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)^3} = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

där faktorn $(x^2 + 3) > 0$ för alla $x \in D_f$. Tecknet på $f''(x)$ sätts därför av faktorn $\frac{x}{(x^2 - 1)^3}$, med

$$x^2 - 1 > 0 \quad \text{då } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \quad \text{och} \quad x^2 - 1 < 0 \quad \text{då } x \in (-1, 1).$$

Alltså har vi

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, \infty) \cup D_f$$

och

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup D_f.$$

Vi har även att de ändpunkter på intervallen ovan som tillhör D_f räknas med i intervallen för var $f(x)$ är konvex respektive konkav. Alltså har vi att $f(x)$ är konvex då $x \in (-1, 0] \cup (1, \infty)$ och konkav då $x \in (-\infty, -1) \cup [0, 1)$.

e)

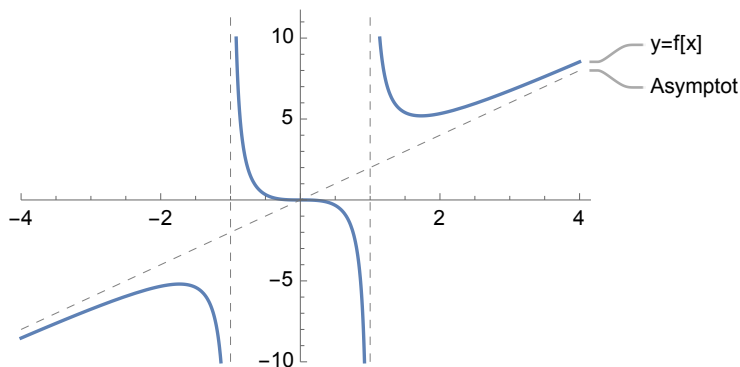


Figure 1: Kurvan $y = f(x)$. Asymptoterna ges av $x = \pm 1$ och $y = 2x$. Funktionen är udda: $f(-x) = -f(x)$. De lokala extrempunkterna ges av $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ och $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$. Punkten $(0, 0)$ är en terrasspunkt.

Svar:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $x = 1$ är lodrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \rightarrow 1$ och $x = -1$ är lodrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \rightarrow -1$.
- $y = 2x$ är sned asymptot till $y = f(x)$ då $x \rightarrow \pm\infty$.
- $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{3}$ är kritiska punkter. För teckenschemat, se lösningen ovan.
- $f(x)$ är konvex då $x \in (-1, 0] \cup (1, \infty)$ och konkav då $x \in (-\infty, -1) \cup [0, 1)$.
- Se figur 1.

6 Uppgift 6

Ett par polaroidglasögon har gått sönder och en student håller upp de två glaslinserna i en rät linje, den ena efter den andra, mot solljuset. Mängden ljus som flödar igenom linserna beror på hur de är roterade relativt varandra. Om den relativa vinkeln mellan dem är θ ges mängden ljus I som kommer igenom av $I = I_o(\cos \theta)^2/2$, där I_o är den infallande ljusstyrkan. Hur snabbt och i vilken riktning vrider studenten på den ena linsen, om den andra är stilla, ljusflödet minskar med en hastighet som motsvarar en halvering på en sekund, och den relativa vinkeln mellan de två linserna är $\pi/4$ radianer?

Lösning: Implicit derivering m.a.p. tiden av

$$\frac{I}{I_o} = \frac{\cos^2 \theta}{2}$$

ger

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{I}{I_o} \right] = -(\cos \theta \sin \theta) \theta' \quad \Leftrightarrow \quad \theta' = -\frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \frac{d}{dt} \left[\frac{I}{I_o} \right]. \quad (6.1)$$

Då det gäller att $\theta = \pi/4$ och $\frac{d}{dt} \left[\frac{I}{I_o} \right] = -\frac{1}{2}$ gäller att

$$\theta' \stackrel{(6.1)}{=} -\frac{1}{1/2} \left(-\frac{1}{2} \right) = 1.$$

Svar: Den relativa vinkeln ökar med 1 radian per sekund.