

Tentamen
MVE426/MVE425/MVE640, Matematik, del C
2023-03-18, 12.00–16.00

Telefonvakt: Anna Karlsson, 0721-575850.

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: 3:a: 20-31 poäng, 4:a: 32-41 poäng, 5:a: 42-50 poäng.

Resultatet meddelas i LADOK. Information om granskningstillfälle anslås på kurshemsidan.

OBS! Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida). Numrera de inlämnade bladen *efter* att du har sorterat dem! Använd inte röd penna!

1. Derivera följande funktionsuttryck med avseende på x . Ange vilka deriveringsregler du använder och var i dina kalkyler de används. Svara på enklast möjliga form.

(a) $\frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ (b) $(\ln x)\sqrt{\ln x}$ (c) $\cos(\arcsin[\sqrt{1 - x^2}])$ (7p)

2. Bestäm den punkt på kurvan $y = \sqrt{2x^3 + 1}$ i vilken kurvans tangent går genom origo. Ange även ekvationen för sagda tangent. (6p)

3. Bestäm största och minsta värde för $f(x) = e^x|x - 1|$ på intervallet $[-1, 6/5]$.
(Tips: $e \approx 2.7$ och $e^{1.2} \approx 3.3$.) (6p)

4. Skissa grafen till en funktion $f(x)$ som stämmer överens med nedanstående teckenschema för dess derivata och andraderivata. Markera i figuren var funktionen har lokala extrempunkter, terrasspunkter respektive inflexionspunkter.

x	$<$	0	$<$	1	$<$	2	$<$	3	$<$	4	$<$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

(4p)

5. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4}$.

(a) Bestäm definitionsmängden och eventuella lodräta asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Motivera väl! (3p)

(b) Bestäm eventuella vågräta och/eller sneda asymptoter till kurvan $y = f(x)$. (2p)

(c) Bestäm eventuella kritiska punkter och gör ett teckenschema för derivatan. (3p)

(d) Skissa kurvan $y = f(x)$. All information från föregående deluppgifter ska tydligt framgå av grafen. (2p)

(e) Bestäm, för varje värde på konstanten C , antalet lösningar till ekvationen $f(x) = C$. (2p)

6. En pinne som delvis är nedsänkt under en vattenyta ser böjd ut på grund av att ljusets brytningsvinkel ändras vid övergången mellan två material (s.k. refraktion). Sambandet ges av $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, där θ_1 är infallsvinkeln, θ_2 är utfallsvinkeln och n_1 och n_2 är materialkonstanter (olika brytningsindex). Säg att ett barn leker med pinnen och vrider den så att infallsvinkeln ändras med $1/\sqrt{2}$ radianer per sekund. Hur snabbt ändras utfallsvinkeln då infallsvinkeln är $\pi/4$ radianer? Antag att $n_2/n_1 = 3/4$ och att utfallsvinkeln är större än noll och mindre än $\pi/2$ radianer. (5p)

7. (a) Definiera vad som menas med en *avtagande* funktion. (2p)

(b) Visa att $D[\sin x] = \cos x$. (4p)

Det är tillåtet att använda gränsvärdena $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ och $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

8. Formulera och bevisa produktregeln. (4p)

Lycka till!