

1 Uppgift 1

Uppgift: Derivera följande funktionsuttryck med avseende på x . Ange vilka deriveringsregler du använder och var i dina kalkyler de används. Svara på enklast möjliga form.

$$(a) \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} \quad (b) (\ln x)\sqrt{\ln x} \quad (c) \cos(\arcsin[\sqrt{1 - x^2}])$$

Lösning:

$$\begin{aligned} a) \quad D \left[\frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} \right] &= [\text{kvotregeln}] = \frac{(2x + 2)(x - 1) - (x^2 + 2x - 2)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} \\ b) \quad D \left[\ln x \sqrt{\ln x} \right] &= D \left[(\ln x)^{3/2} \right] = [\text{kedjeregeln}] = \frac{3}{2} (\ln x)^{1/2} \frac{1}{x} = \frac{3\sqrt{\ln x}}{2x} \\ c) \quad D \left[\cos(\arcsin[\sqrt{1 - x^2}]) \right] &= [\text{kedjeregeln}] = \\ &= -\sin \left[\arcsin[\sqrt{1 - x^2}] \right] \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2}} \frac{1}{2} (1 - x^2)^{1/2} (-2x) = \\ &= -\sqrt{1 - x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{1}{2} (1 - x^2)^{-1/2} (-2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

Svar:

$$a) D \left[\frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} \right] = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} \quad b) D \left[\ln x \sqrt{\ln x} \right] = \frac{3\sqrt{\ln x}}{2x} \quad c) D \left[\cos(\arcsin[\sqrt{1 - x^2}]) \right] = \frac{x}{|x|}$$

2 Uppgift 2

Uppgift: Bestäm den punkt på kurvan $y = \sqrt{2x^3 + 1}$ i vilken kurvans tangent går genom origo. Ange även ekvationen för sagda tangent.

Lösning: För kurvan $y = f(x)$ gäller att tangenten i punkten där $x = a$ har ekvationen

$$y_T = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2.1)$$

Vi har

$$f(x) = \sqrt{2x^3 + 1} \quad (2.2a)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 + 1}} (6x^2) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 1}} \quad (2.2b)$$

och för att tangenten i punkten $(a, f(a))$ ska gå genom origo krävs

$$\begin{aligned} y_T|_{x=0} &\stackrel{(2.1)}{=} f(a) + f'(a)(-a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = af'(a) \quad \stackrel{(2.2)}{\Leftrightarrow} \quad \sqrt{2a^3 + 1} = \frac{3a^3}{\sqrt{2a^3 + 1}} \\ &\Leftrightarrow \quad 2a^3 + 1 = 3a^3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = a^3 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \end{aligned}$$

och vi har

$$f(1) = \sqrt{3}, \quad f'(1) = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad y_T = \sqrt{3} + \sqrt{3}(x - 1) = x\sqrt{3}.$$

Svar: Punkten är $(1, \sqrt{3})$ och tangentens ekvation ges av $y_T = x\sqrt{3}$.

3 Uppgift 3

Uppgift: Bestäm största och minsta värde för $f(x) = e^x|x - 1|$ på intervallet $[-1, 6/5]$. (Tips: $e \approx 2.7$ och $e^{1.2} \approx 3.3$.)

Lösning: Funktionen

$$f(x) = e^x|x - 1|, \quad D_f = [-1, 6/5]$$

är kontinuerlig på det slutna intervallet $[-1, 6/5]$. Satsen om största och minsta värde ger därför att $f(x)$ antar ett största och minsta värde på $[-1, 6/5]$.

Kandidater till största och minsta värde är randpunkter, singulära punkter och kritiska punkter. Randpunkterna är $x \in \{-1, 6/5\}$ med

$$f(-1) = 2e^{-1}, \quad f(6/5) = \frac{1}{5}e^{6/5} = 0.2e^{1.2}.$$

Dessutom gäller att

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x-1), & x \geq 1 \\ e^x(1-x), & x < 1 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} e^x(x-1) + e^x = xe^x, & x > 1 \\ e^x(1-x) - e^x = -xe^x, & x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = |x|e^x, \quad D_{f'} = (-1, 6/5) \setminus \{1\}$$

vilket ger att $x = 1$ är en singulär punkt, med

$$f(1) = 0.$$

De kritiska punkterna ges av

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow |x|e^x = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x = 0$$

med

$$f(0) = e^0 = 1.$$

Eftersom $e \approx 2.7$ och $e^{1.2} \approx 3.3$ har vi att

$$f(1) = 0 < f(6/5) \approx 0.66 < f(-1) \approx 0.74 < f(0) = 1$$

Svar: $\min_{x \in D_f} f(x) = 0$ och $\max_{x \in D_f} f(x) = 1$.

4 Uppgift 4

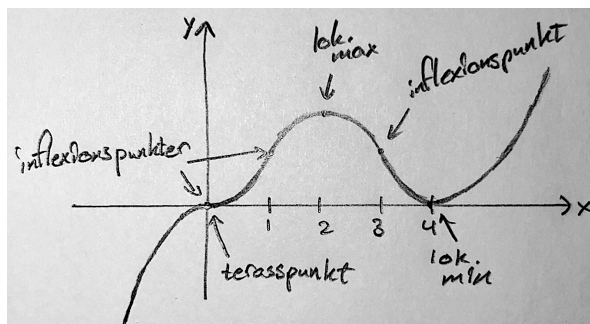
Uppgift: Skissa grafen till en funktion $f(x)$ som stämmer överens med nedanstående teckenschema för dess derivata och andraderivata. Markera i figuren var funktionen har lokala extrempunkter, terrasspunkter respektive inflexionspunkter.

x	$<$	0	$<$	1	$<$	2	$<$	3	$<$	4	$<$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Lösning (valfritt mellansteg):

x	$<$	0	$<$	1	$<$	2	$<$	3	$<$	4	$<$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$

Svar:



5 Uppgift 5

Uppgift: Betrakta funktionen $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4}$.

- Bestäm definitionsområdet och eventuella lodräta asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Motivera väl!
- Bestäm eventuella vågräta och/eller sneda asymptoter till kurvan $y = f(x)$.
- Bestäm eventuella kritiska punkter och gör ett teckenschema för derivatan.
- Skissa kurvan $y = f(x)$. All information från föregående deluppgifter ska tydligt framgå av grafen.
- Bestäm, för varje värde på konstanten C , antalet lösningar till ekvationen $f(x) = C$.

Lösning:

a)

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4} \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$$

På D_f kan funktionen förenklas:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4} = \frac{2x^2(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{2x^2}{x - 2} \quad (5.1)$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{x - 2} \rightarrow \infty, \quad \text{då } x \rightarrow 2^+$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{x - 2} \rightarrow -\infty, \quad \text{då } x \rightarrow 2^-$$

$\Rightarrow x = 2$ är lodrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \rightarrow 2$.

Vi noterar att det inte finns någon lodrät asymptot då $x \rightarrow -2$. Istället gäller att

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{x - 2} = -2.$$

b) För sned asymptot $y = kx + m$ betraktar vi

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x}{x - 2} = \frac{2}{1 - \frac{1}{x}} \rightarrow 2 = k, \quad \text{då } x \rightarrow \pm\infty$$

$$f(x) - kx = \frac{2x^2}{x - 2} - 2x = \frac{4x}{x - 2} = \frac{4}{1 - \frac{2}{x}} \rightarrow 4 = m, \quad \text{då } x \rightarrow \pm\infty$$

$\Rightarrow y = 2x + 4$ är sned asymptot till $y = f(x)$ då $x \rightarrow \pm\infty$.

c)

$$f'(x) \stackrel{(5.1)}{=} \frac{4x(x - 2) - 2x^2}{(x - 2)^2} = \frac{2x(x - 4)}{(x - 2)^2}$$

D_f är ett öppet intervall, så randpunkter saknas. $D_{f'} = D_f$, så singulära punkter saknas. Kritiska punkter:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 4\}$$

så $x \in \{0, 4\}$ är kritiska punkter.

Tecknet på $f'(x)$ bestäms av de två faktorerna i $x(x - 4)$:

$$f'(x) > 0, \text{ då } x \in D_f \text{ och } \begin{cases} x > 0 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4 \text{ samt då } \begin{cases} x < 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ då $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty) \setminus \{-2\}$.

Pss $f'(x) < 0$ då $x \in (0, 4) \setminus \{2\}$.

Teckenschema:

x		-2		0		2		4	
$f'(x)$	+	$\neq$	+	0	-	$\neq$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\neq$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\neq$	$\searrow$	16	$\nearrow$

med $f(0) = 0$ och $f(4) = 16$.

d)

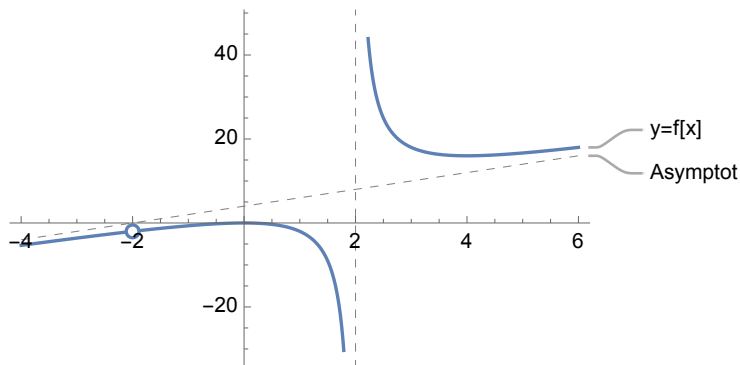


Figure 1: Kurvan $y = f(x)$. Asymptoterna ges av $x = 2$ och $y = 2x + 4$. Notera att $-2 \notin D_f$. Punkten $(-2, -2)$ är därför inte en punkt på kurvan. De lokala extrempunkterna ges av $(0, 0)$ och $(4, 16)$.

Svar:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, $x = 2$ är lodrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \rightarrow 2$.
- $y = 2x + 4$ är sned asymptot till $y = f(x)$ då $x \rightarrow \pm\infty$.
- $x = 0$ och $x = 4$ är kritiska punkter. För teckenschemat, se lösningen ovan.
- Se figur 1.
- Av grafen utläses att ekvationen $f(x) = C$ har följande antal lösningar:

$C > 16$	$\Rightarrow$	2 lösningar
$C = 16$	$\Rightarrow$	1 lösning
$0 < C < 16$	$\Rightarrow$	ingen lösning
$C = 0$	$\Rightarrow$	1 lösning
$-2 < C < 0$	$\Rightarrow$	2 lösningar
$C = -2$	$\Rightarrow$	1 lösning
$C < -2$	$\Rightarrow$	2 lösningar

6 Uppgift 6

En pinne som delvis är nedsänkt under en vattenyta ser böjd ut på grund av att ljusets brytningsvinkel ändras vid övergången mellan två material (s.k. refraction). Sambandet ges av $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, där θ_1 är infallsvinkeln, θ_2 är utfallsvinkeln och n_1 och n_2 är materialkonstanter (olika brytningsindex). Säg att ett barn leker med pinnen och vrider den så att infallsvinkeln ändras med $1/\sqrt{2}$ radianer per sekund. Hur snabbt ändras utfallsvinkeln då infallsvinkeln är $\pi/4$ radianer? Antag att $n_2/n_1 = 3/4$ och att utfallsvinkeln är större än noll och mindre än $\pi/2$ radianer.

Lösning: Implicit derivering m.a.p. tiden av

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (6.1)$$

ger

$$n_1 \cos(\theta_1) \theta_1' = n_2 \cos(\theta_2) \theta_2' \quad \xleftrightarrow{\cos \theta_2 \neq 0} \quad \theta_2' = \frac{n_1 \cos(\theta_1) \theta_1'}{n_2 \cos(\theta_2)} \quad (6.2)$$

där vi har använt $\theta_2 \in (0, \pi/2)$. Med det följer även $\cos \theta_2 > 0$:

$$\begin{aligned} \theta_2' &\stackrel{(6.2)}{=} \frac{n_1 \cos(\theta_1) \theta_1'}{n_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} \stackrel{(6.1)}{=} \frac{n_1 \cos(\theta_1) \theta_1'}{n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2 \sin \theta_1}{n_1}\right)^2}} = \left[\begin{array}{c} \theta_1 = \pi/4 \\ n_2/n_1 = 3/4 \end{array} \right] = \frac{4 \cos(\pi/4) \theta_1'}{3 \sqrt{1 - \left(\frac{4 \sin(\pi/4)}{3}\right)^2}} = \\ &= \frac{\theta_1' 4/\sqrt{2}}{3 \sqrt{1 - \left(\frac{4/\sqrt{2}}{3}\right)^2}} = \frac{\theta_1' 2\sqrt{2}}{3 \sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = \frac{\theta_1' 2\sqrt{2}}{3 \sqrt{\frac{1}{9}}} = \theta_1' 2\sqrt{2} = \left[\theta_1' = 1/\sqrt{2} \right] = 2. \end{aligned}$$

Svar: Utfallsvinkeln ändras med 2 radianer per sekund.