

**Tentamen**  
**MVE426/MVE425/MVE640, Matematik, del C**  
**2022-08-18 , 14.00–18.00**

**Examinator och telefonvakt:** Thomas Wernstål , telefon: 3557

**Hjälpmedel:** Inga

Betygsgränser: 3:a: 20-31 poäng, 4:a: 32-41 poäng, 5:a: 42-50 poäng

Resultatet meddelas i LADOK. Information om granskningstillfälle anslås på kurshemsidan.

**OBS:** Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida).

Numrera de inlämnade bladen *efter* att du sorterat dem! Använd inte röd penna!

1. Derivera följande funktionsuttryck med avseende på  $x$ . Ange vilka deriveringsregler du använder och var i dina kalkyler de används. Svara på enklast möjliga form. (7p)

(a)  $\frac{x^3 + 3}{3 - x^3}$

(b)  $\cos(2x) \tan(2x)$

(c)  $\arccos(\sqrt{\frac{1}{2} - x})$  (7p)

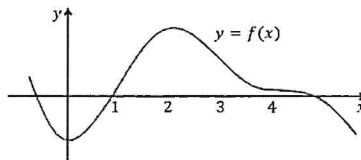
2. Bestäm konstanten  $a$  så att kurvorna  $y = e^{ax}$  och  $y = x^2$  tangerar varandra. (5p)

3. Låt  $C$  vara kurvan  $y^4 + x + xy = 5$ .

- (a) Bestäm tangenten till kurvan  $C$  i punkten  $(2, 1)$ . (4p)

- (b) Avgör om tangenten i deluppgift (a) ligger ovanför eller under kurvan  $C$  lokalt kring punkten  $(2, 1)$  (antag  $y$ -axeln pekar uppåt). (2p)

4. Figuren till höger illustrerar grafen till en funktion  $f(x)$ . Gör ett teckenschema för funktionens derivata och andraderivata. (4p)



5. Betrakta funktionen  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- (a) Bestäm definitionsområdet och eventuella lodräta asymptoter till kurvan  $y = f(x)$ . Motivera väl! (3p)

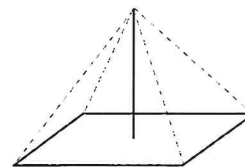
- (b) Bestäm eventuella vågräta och/eller sneda asymptoter till kurvan  $y = f(x)$ . (2p)

- (c) Bestäm eventuella kritiska punkter och gör ett teckenschema för derivatan. (3p)

- (d) Skissa kurvan  $y = f(x)$ . All information från föregående deluppgifter skall tydligt framgå av grafen. (2p)

- (e) Bestäm, för varje värde på konstanten  $C$ , antalet lösningar till ekvationen  $f(x) = C$ . (2p)

6. En 12 meter lång järnstång skall kapas i 5 delar av vilka 4 är lika långa. De delar som är lika långa skall utgöra den kvadratiske basen för ett tält och den återstående delen skall resas i mitten vinkelrät mot basytan. Tältet spänns upp i pyramidform så som figuren till höger visar. Hur långa skall delarna vara för att ge maximal volym av tältet? (6p)



7. (a) Definiera vad som menas med ett lokalt maximum till en funktion  $f(x)$ . (2p)

- (b) Visa att  $D[e^x] = e^x$ . (4p)

Det är tillåtet att använda gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

8. Formulera och bevisa satsen om derivata av sammansatta funktioner  $f(g(x))$  (dvs. kedjeregeln) under förutsättning att  $g(x+h) \neq g(x)$ , för alla  $h$  i någon omgivning av origo. (4p)

**Lycka till!**

# Lösningsskrif

Tentamen MVE426, del C, 18 aug 2022

kvotregeln

uppg 1 a)  $D\left[\frac{x^3+3}{3-x^3}\right] \stackrel{\downarrow}{=} \frac{3x^2(3-x^3) - (-3x^2)(x^3+3)}{(3-x^3)^2} = \frac{18x^2}{(3-x^3)^2}$

kedjeregeln

b)  $D[\cos(2x)\tan(2x)] = D[\sin(2x)] \stackrel{\downarrow}{=} 2\cos(2x)$

kedjeregeln

c)  $D\left[\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{2}-x}\right)\right] \stackrel{\downarrow}{=} \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{\frac{1}{2}-x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}-x}} \cdot (-1) =$   
 $= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+x}\sqrt{\frac{1}{2}-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

uppg 2 Kurvorna tangenter varandra där  $x=b$  om

$$\begin{cases} ae^{ab} = 2b \\ e^{ab} = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 2 \\ e^{ab} = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 2 \\ b = \pm e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\pm 2}{e} \\ b = \pm e \end{cases}$$

Svar: Kurvorna tangenter varandra om  $a = \frac{\pm 2}{e}$

uppg 3 a)  $y^4 + x + xy = 5 \Rightarrow 4y^3y' + 1 + y + xy' = 0$   
 $\uparrow$   
Implicit  
derivering

I punkten  $(2,1)$  för vi spec.  $4y' + 2 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}$

Så tangenten till C i  $(2,1)$  ges av ekv;

$$y-1 = -\frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow \underline{\underline{x+3y=5}}$$

b) Ytterligare en derivering av båda led i ekv. ger

$$12y^2(y')^2 + 4y^3y'' + y' + y' + xy'' = 0$$

Där  $x=2$ ,  $y=1$  och  $y' = -\frac{1}{3}$  får vi spec.

$$\frac{4}{3} + 4y'' - \frac{2}{3} + 2y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1}{9}$$

Eftersom andra derivatan är negativ är kurvan konkav i tangeringspunkten, vilket spec. betyder att kurvan ligger under tangenten lokalt kring punkten.

uppg 4

|          |       |     |       |     |       |     |       |     |       |     |     |
|----------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-----|
| $x$      | $< 0$ | $0$ | $< 1$ | $1$ | $< 2$ | $2$ | $< 3$ | $3$ | $< 4$ | $4$ | $<$ |
| $f''(x)$ | +     | +   | +     | 0   | -     | -   | -     | 0   | +     | 0   | -   |
| $f'(x)$  | -     | 0   | +     | +   | +     | 0   | -     | -   | -     | 0   | -   |

uppg 5 a)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x \neq 1\}$

$$\frac{x}{\ln x} \rightarrow 0, \text{ då } x \rightarrow 0^+$$

så det finns ingen lodrät asymptot där  $x=1$

$$\frac{x}{\ln x} \rightarrow \infty, \text{ då } x \rightarrow 1^+$$

$$\frac{x}{\ln x} \rightarrow -\infty, \text{ då } x \rightarrow 1^-$$

så  $x=1$  är en lodrät asymptot

b)  $\frac{x}{\ln x} = \frac{1}{\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\text{SGV} \rightarrow 0^+}} \rightarrow \infty, \text{ då } x \rightarrow \infty$

så kurvan har ingen vågrät asymptot då  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0, \text{ då } x \rightarrow \infty$$

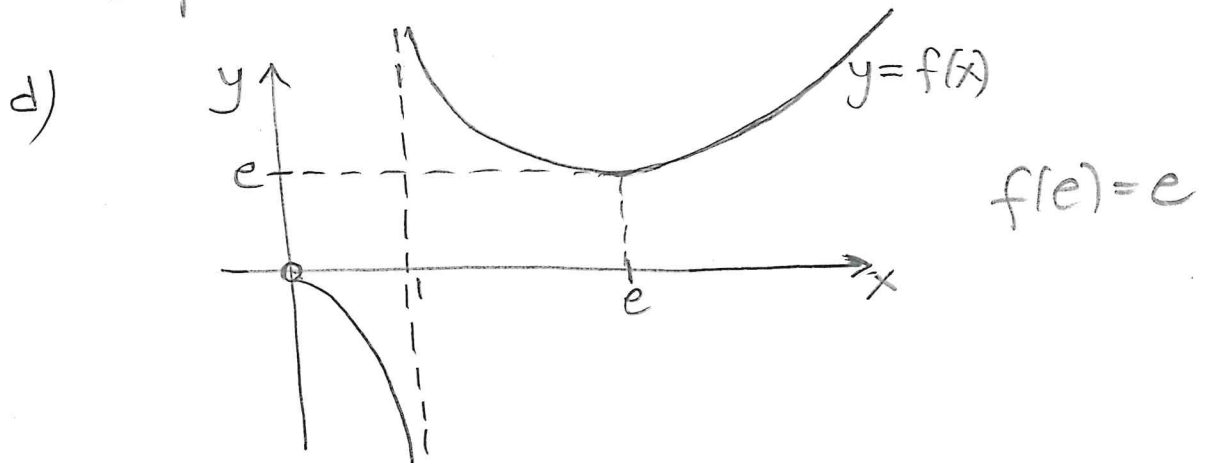
så om kurvan har en sned asymptot  $y=kx+m$   
 så är  $k=0$ , men;

$$f(x) - \underbrace{kx}_=0 = \frac{x}{\ln x} \rightarrow \infty,$$

så kurvan har ingen sned asymptot då  $x \rightarrow \infty$

c)  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=e}}$   
 kritisk punkt

| x     | 0 | < | 1 | < | e | < |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) |   | - |   | - | 0 | + |



e) Vi avläser från grafen i d) att ekv. har;

$$\begin{cases} \text{två lösningar om } C > e \\ \text{en lösning om } C = e \text{ eller } C < 0 \\ \text{inga lösningar om } 0 \leq C < e \end{cases}$$

Uppg 6

$x$  = längden av de fyra bas stängerna  
 $y$  = längden av stängen i mitten.

Av informationen i texten vet vi att  $4x + y = 12$

$$\text{Tältets volym} = \frac{1}{3} x^2 y = \frac{1}{3} x^2 \underbrace{(12 - 4x)}_{f(x)}$$

Vi söker största värdet av  $f(x)$  för  $0 < x < 3$

$$f'(x) = 8x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x=2$$

| $x$     | 0 | < | 2 | < | 3 |
|---------|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ |   | + | 0 | - |   |

Av detta följer att  $f(x)$  är som störst då  $x=2$

Svar: Basstängerna skall vara 2 m långa och  
mittstängen 4 m

---