

Lösningsförslag

Tentamen MVE426, del C, 13 april 2022

uppg 1 a) $D[2x\sqrt{x} \ln|x|] = D[2x^{3/2} \ln|x|] \stackrel{\text{produktregeln}}{=} \downarrow$
 $= 2 \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} \ln|x| + 2x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{3\sqrt{x} \ln|x| + 2\sqrt{x}}}$

b) $D[\sqrt[3]{\cos(3x)}] = D[(\cos(3x))^{1/3}] \stackrel{\text{kedjeregeln}}{=} \downarrow$
 $= \frac{1}{3} (\cos(3x))^{-2/3} \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 =$
 $= \underline{\underline{-\tan(3x) \sqrt[3]{\cos(3x)}}}$

c) $D\left[\arctan\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\right] \stackrel{\text{kedjeregeln \& kvotregeln}}{=} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1) - (x-2)}{(x+1)^2} =$
 $= \frac{3}{(x+1)^2 + (x-2)^2} = \underline{\underline{\frac{3}{2x^2 - 2x + 5}}}$

uppg 2 $y = (bx+1)e^x$, $y' = be^x + (bx+1)e^x = (bx+7)e^x$

Tangenten i en punkt $x=a$ ges av;

$$y - (ba+1)e^a = (ba+7)e^a(x-a)$$

Tangenten går genom origo om;

$$-(ba+1)e^a = (ba+7)e^a(-a) \Leftrightarrow$$

$$ba+1 = a(ba+7) \Leftrightarrow ba^2 + a - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{6}a - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{6}} = \frac{-1 \pm 5}{12}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ eller } a = \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = (6 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1)e^{-1/2} = \frac{-2}{\sqrt{e}}$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = (6 \cdot \frac{1}{3} + 1)e^{1/3} = 3\sqrt[3]{e}$$

Svar: 1 punkterna $(-\frac{1}{2}, \frac{-2}{\sqrt{e}})$ och $(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{e})$

Uppg 3 $f(x) = x^2 - 5|x-1| + 3$, $I = [0, 3]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5(x-1) + 3, & \text{då } x < 1 \\ x^2 - 5(x-1) + 3, & \text{då } x > 1 \end{cases}$$

$x < 1$: $f'(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \notin I$

$x > 1$: $f'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} > 1$ & $\frac{5}{2} \in I$

så $x = \frac{5}{2}$ är en kritisk punkt till $f(x)$ i I .

$x = 1$ är en singular punkt ty $f'_-(1) = 7 \neq -3 = f'_+(1)$

Möjliga punkter där största & minsta värde kan antas är således i $x = 0, 1, \frac{5}{2}, 3$.

Vi jämför funktionsvärdena i dessa punkter;

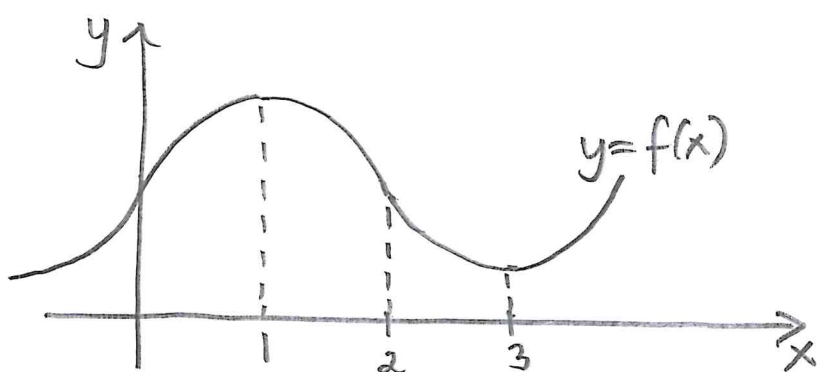
$$f(0) = -2, \quad f(1) = 4, \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{4}, \quad f(3) = 2$$

Svar: Det största värdet är 4 och minsta är -2

Uppg 4 Av figuren avläser vi att;

x	< 0	0	< 1	1	< 2	2	< 3	3	$<$
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗		↖		↘		↗		↗

så kurvan $y=f(x)$ skulle kunna ha följande utseende;



Uppg 5 $f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{x+1}$

a) Definitionsmängden $D_f: x \neq -1$

$$f(x) = \frac{\overbrace{2x^2 - x + 5}^{\rightarrow \infty}}{x+1} \rightarrow -\infty, \text{ då } x \rightarrow -1^-$$

$$\rightarrow \infty, \text{ då } x \rightarrow -1^+$$

så kurvan har en lodrät asymptot $x = -1$

b) $\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2 - x + 5}{x(x+1)} = \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 2 = k, \text{ då } x \rightarrow \pm \infty$

$$f(x) - \overset{2}{k}x = \frac{2x^2 - x + 5}{x+1} - 2x = \frac{2x^2 - x + 5 - 2x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \frac{-3x + 5}{x+1} = \frac{-3 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow -3 = m$$

så $y = 2x - 3$ är en sned asymptot då $x \rightarrow \pm \infty$

alt. Polynomdivision ger att;

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \\ x+1 \overline{) 2x^2 - x + 5} \\ \underline{-(2x^2 + 2x)} \\ -3x + 5 \\ \underline{-(-3x - 3)} \\ 8 \end{array}$$

$$\text{så } \frac{2x^2 - x + 5}{x+1} = 2x - 3 + \frac{8}{x+1} \quad (*)$$

varpå det följer att;

$$f(x) - (2x - 3) = \frac{8}{x+1} \rightarrow 0, \text{ då } x \rightarrow \pm \infty$$

vilket också visar att $y = 2x - 3$ är en sned asymptot då $x \rightarrow \pm \infty$.

$$c) f'(x) = \frac{(4x-1)(x+1) - (2x^2 - x + 5)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 6}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x=1 \text{ eller } x=-3}_{\text{kritiska punkter}}$$

x	< -3	< -1	< 1	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Anm. Kritiska punkter kan också beräknas från (*);

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x+1 = \pm 2$$

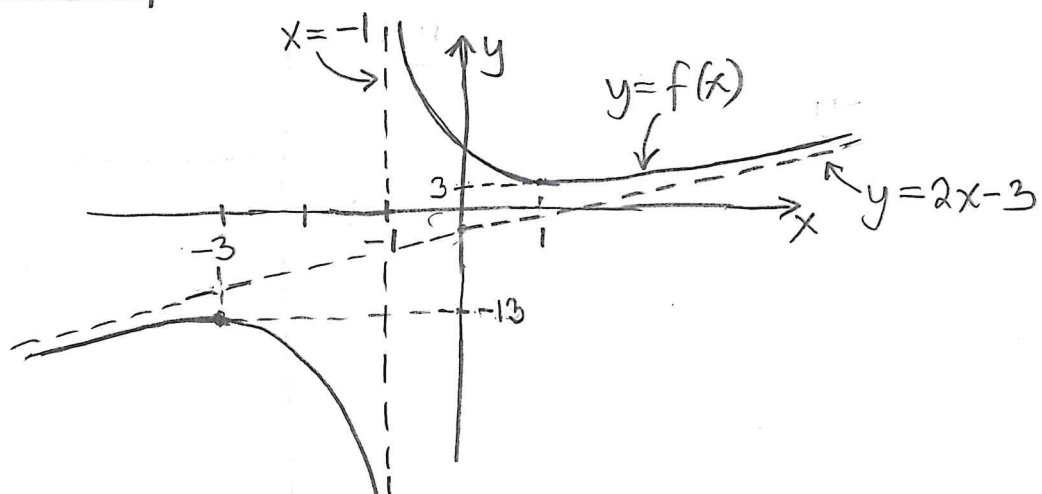
$$d) f''(x) = \frac{(4x+4)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^2+4x-6)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{4(x+1)^2 - 2(2x^2+4x-6)}{(x+1)^3} = \frac{16}{(x+1)^3} \begin{cases} < 0, \text{ då } x < -1 \\ > 0, \text{ då } x > -1 \end{cases}$$

så kurvan är konkav där $x < -1$ och konvex där $x > -1$.

e) Vi kan samla information från ovanstående deluppgifter i följande teckenschema;

x	$-\infty$	< -3	< -1	< 1	$< \infty$
$f''(x)$		$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-13	$-\infty$	3	∞



Uppg 6 Deriverar vi båda led (implicit)
i identiteten $P \cdot V^{1.4} = \text{konstant m.a.p.}$
tiden t , så får vi;

$$P' \cdot V^{1.4} + P \cdot 1.4 \cdot V^{0.4} \cdot V' = 0$$

Med $P = 4$, $V = 10$ och $V' = -1$ får vi;

$$P' \cdot 10^{1.4} + 4 \cdot 1.4 \cdot 10^{0.4} \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow P' = \frac{5.6}{10}$$

Svar: Tryckförändringen är 0.56 bar/s