

Lösningsförslag

Tentamen MVE426, del C, 17 mars 2022

Uppg 1

a) $D[\sqrt{x} \arcsin x] \stackrel{\text{produktregeln}}{=} \frac{\arcsin x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $D[\sin^3(2x)] \stackrel{\text{kedjeregeln}}{=} 6\sin^2(2x)\cos(2x)$

c) $D\left[\ln\left(\frac{2x+3}{x-2}\right)\right] \stackrel{\text{kedjeregeln \& kvotregeln}}{=} \frac{x-2}{2x+3} \cdot \frac{2(x-2)-(2x+3)}{(x-2)^2} = \frac{7}{(2x+3)(2-x)}$

Uppg 2

$5y+x=2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$ så $k_N = -\frac{1}{5}$ och
därmed $y' = k_T = -\frac{1}{k_N} = 5$ i de sökta punkterna.

$$y = 4x^3 + 2x + 2 \Rightarrow y' = 12x^2 + 2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

Fall 1: $x = \frac{1}{2}$ insatt i normalens ekr. ger $y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

Punkten $(\frac{1}{2}, \frac{3}{10})$ ligger dock inte på kurvan ty;

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 4x^3 + 2x + 2 = \frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{7}{2} \neq \frac{3}{10}$$

Fall 2: $x = -\frac{1}{2}$ insatt i normalens ekr. ger $y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$

Punkten $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ligger också på kurvan ty;

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 4x^3 + 2x + 2 = -\frac{1}{2} - 1 + 2 = \frac{1}{2}$$

Svar: 1 punkten $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Uppg 3 $f(x) = e^x \cos x$, $D_f = [0, \frac{\pi}{2}]$

Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ så existerar ett största och minsta värde.

Eftersom $f(x)$ inte har några singulära punkter så måste det största och minsta värdena antas i kritiska punkter eller randpunkter. I randpunkterna har vi;

$$f(0) = 1, \quad f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Vidare är;

$$f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x) = 0$$

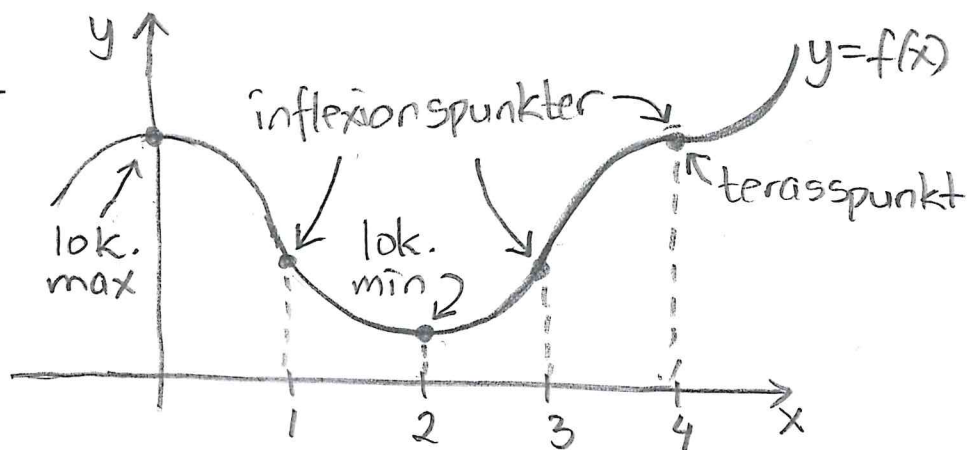
$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$x = \frac{\pi}{4}$ är den enda kritiska punkten i $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\text{och } f(\frac{\pi}{4}) = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} > 1 = f(0) > 0 = f(\frac{\pi}{2})$$

Svar: Största värdet är $e^{\pi/4}/\sqrt{2}$ och minsta är 0

uppg 4



uppg 5

a) $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \rightarrow \infty, \text{ d\aa } x \rightarrow -1^- \text{ och d\aa } x \rightarrow 1^+$$

s\aa $x = -1$ och $x = 1$ \r ar lodr\aa ta asymptoter

b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{|x| + \frac{1}{|x|}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \rightarrow \infty, \text{ d\aa } x \rightarrow \pm \infty$

s\aa $y = f(x)$ har inga v\aa gr\aa ta asymptoter

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{|x|}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \rightarrow -1, \text{ d\aa } x \rightarrow -\infty$$

$$\rightarrow 1, \text{ d\aa } x \rightarrow \infty$$

$$f(x) - \frac{|x|}{x} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} - |x| = \frac{x^2 + 1 - |x|\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$\frac{(x^2 + 1)^2 - x^2(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}(x^2 - 1 + |x|\sqrt{x^2 - 1})} = \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}(x^2 - 1 + |x|\sqrt{x^2 - 1})} =$$

$$= \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2 - 1}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)} \rightarrow 0, \text{ d\aa } x \rightarrow \pm \infty$$

så $y=x$ är en sned asymptot då $x \rightarrow \infty$
 och $y=-x$ är en sned asymptot då $x \rightarrow -\infty$

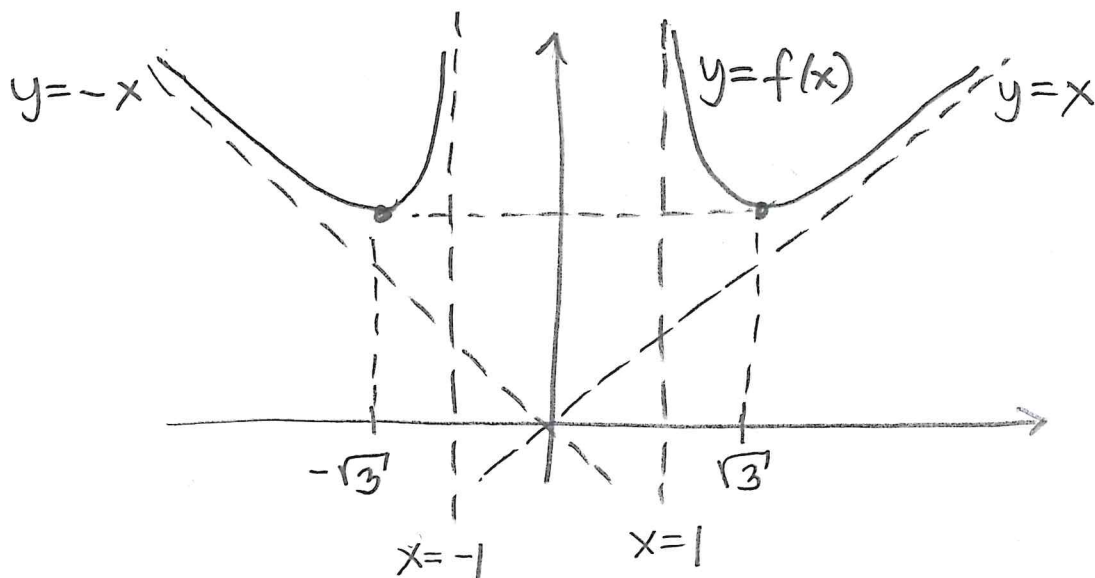
$$c) \quad f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2-1} - (x^2+1) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} =$$

$$= \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^3-3x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x(x^2-3)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

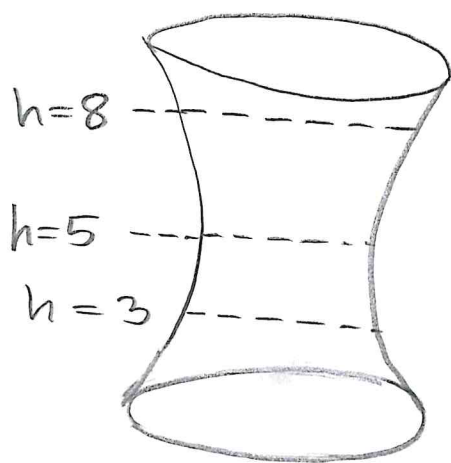
De enda kritiska punkterna i D_f är $x = \pm\sqrt{3}$

x	$< -\sqrt{3}$	< -1	< 1	$< \sqrt{3}$	
$f'(x)$	-	0	+	-	0

x	$-\infty$	$< -\sqrt{3}$	< -1	< 1	$< \sqrt{3}$	$< \infty$
$f'(x)$		-	0	+	-	0
$f(x)$	∞		$2\sqrt{2}$	∞	$2\sqrt{2}$	∞



uppg 6



$$V = 10h + 25 + \frac{1}{5}(h-5)^3 \quad \text{①}$$

$$V(t) = 10t \quad \text{②} \quad , \quad V'(t) = 10 \quad \text{③}$$

a) Om vi deriverar båda led i ① m.a.p. t så ger kedjeregeln att;

$$V' = \left(10 + \frac{3}{5}(h-5)^2\right) h' = 10 \Rightarrow \quad \text{③}$$

$$h' = \frac{10}{10 + \frac{3}{5}(h-5)^2}$$

$$h=3 \Rightarrow h' = \frac{10}{10 + \frac{12}{5}} = \frac{50}{62} = \underline{\underline{\frac{25}{31}}}$$

$$h=5 \Rightarrow h' = \frac{10}{10} = \underline{\underline{1}}$$

$$h=8 \Rightarrow h' = \frac{10}{10 + \frac{27}{5}} = \underline{\underline{\frac{50}{77}}}$$

Hastigheten med vilket vattennivån höjs beror på hur bred behållaren är vid resp. vattennivå. Speciellt är hastigheten högst vid $h=5$ där behållaren är smalast. Vidare stiger vattnet snabbare då $h=3$ än då $h=8$ ty behållaren är smalare vid $h=3$

b) Deriverar vi ① ytterligare en gång får vi

$$V'' = -\frac{6}{5}(h-5)h' + (10 + \frac{3}{5}(h-5)^2)h'' = 0 \Rightarrow$$

$$h'' = \frac{\frac{6}{5}(5-h)}{10 + \frac{3}{5}(h-5)^2} \underbrace{h'}_{>0}$$

Vi noterar spec. att $h'' \begin{cases} > 0, \text{ då } h < 5 \\ = 0, \text{ då } h = 5 \\ < 0, \text{ då } h > 5 \end{cases}$

Så grafen $y=h(t)$ är konvex då $h < 5$ och konkav då $h > 5$, med inflexionspunkt där $h=5$.

Behållaren är full då $h=10$ som insatt i ① ger $V = 100 + 25 + 25 = 150$ liter vatten.

Av ② följer då att behållaren är full efter 15 minuter.

Grafen till $h(t)$ har således följande utseende;

