

Lösungsansatz tenta 20/8-2020

MVE425, del C

$$\textcircled{1} \quad a) \quad D(\ln(x^2) - \ln(2x)) = D(\ln(x^2)) - D(\ln(2x)) =$$

↑
additionsregeln

$$= \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

↑
kedjeregeln

$$b) \quad D\left(\frac{x \tan x}{x + \tan x}\right) =$$

↑
kvotregeln

$$= \frac{D(x \tan x)(x + \tan x) - x \tan x D(x + \tan x)}{(x + \tan x)^2}$$

↑
produkt-
regeln

$$= \frac{(\tan x + x(1 + \tan^2 x))(x + \tan x) - x \tan x (1 + 1 + \tan^2 x)}{(x + \tan x)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\tan^2 x + x^2(1 + \tan^2 x)}{(x + \tan x)^2}}}$$

$$c) \quad D\left(\sin\left(2 \arcsin \frac{1}{x}\right)\right) = \cos\left(2 \arcsin \frac{1}{x}\right) \cdot D\left(2 \arcsin \frac{1}{x}\right)$$

↑
kedjeregeln

$$= \cos\left(2 \arcsin \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

↑
kedjeregeln

$$\underline{\underline{\quad \quad \quad}}$$

$$\textcircled{2} \quad g'(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kedjeregeln}}}{f'(\sqrt{5x^2-11})} \cdot \frac{5x}{\sqrt{5x^2-11}}$$

$$g'(2) = \underbrace{f'(3)}_{=5} \cdot \frac{10}{3} = \underline{\underline{\frac{50}{3}}}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Med } f(x) = \frac{1}{e^x+1} \text{ för vi all;}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{e^{x+h}+1} - \frac{1}{e^x+1}}{h} =$$

$$= \frac{e^x - e^{x+h}}{h(e^{x+h}+1)(e^x+1)} = \frac{e^x}{(e^{x+h}+1)(e^x+1)} \cdot \underbrace{\frac{1-e^h}{h}}_{\rightarrow -1 \text{ då } h \rightarrow 0 \text{ enl. SGV.}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}, \text{ då } h \rightarrow 0$$

$$\text{så } f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{a) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\}$$

$$\frac{x^2-3}{x+2} \rightarrow \infty, \text{ då } x \rightarrow -2^+$$

$$\frac{x^2-3}{x+2} \rightarrow -\infty, \text{ då } x \rightarrow -2^-$$

$\therefore$ kurvan har den lodräta asymptoten $x = -2$

$$b) \quad f(x) = \frac{x^2 - 3}{x+2} = \frac{x - \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow \infty, \text{ d\AA } x \rightarrow \infty$$

$$\rightarrow -\infty, \text{ d\AA } x \rightarrow -\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 3}{x(x+2)} = \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow 1 = k, \text{ d\AA } x \rightarrow \pm \infty$$

$$f(x) - kx = \frac{x^2 - 3}{x+2} - x = \frac{x^2 - 3 - x(x+2)}{x+2} =$$

$$\uparrow$$

$$k=1$$

$$= \frac{-3 - 2x}{x+2} = \frac{-\frac{3}{x} - 2}{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow -2, \text{ d\AA } x \rightarrow \pm \infty$$

∴ kurvan har den sneda asymptoten

$$\underline{\underline{y = x - 2}}, \text{ d\AA } x \rightarrow \pm \infty$$

$$c) \quad f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2 - 3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{4 - 3} = -2 \pm 1$$

∴ f har de kritiska punkterna $x = -3$

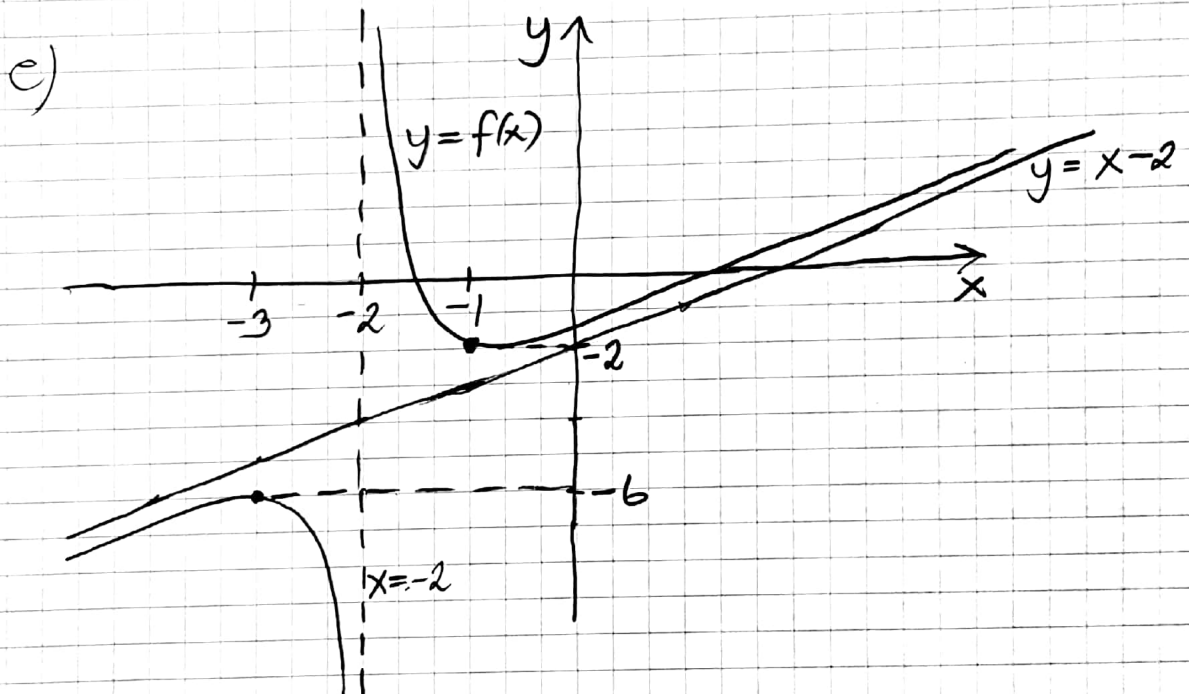
och $x = -1$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		∞
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	∞

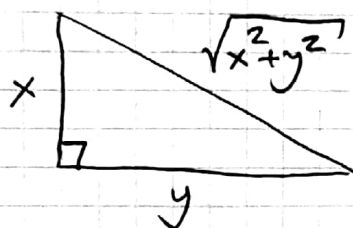
$$f'(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad f''(x) &= \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x+3) \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \\
 &= \frac{(2x+4)(x+2) - 2(x^2+4x+3)}{(x+2)^3} = \frac{2}{(x+2)^3}
 \end{aligned}$$

Vi ser ser. att $f''(x) < 0$ då $x < -2$
 och därmed konkav där $x < -2$
 vidare är $f''(x) > 0$ då $x > -2$
 och därmed konvex där $x > -2$.



⑤



Area är $\frac{xy}{2} = 2$ så $y = \frac{4}{x}$

Vi söker minimum av $L(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}$
då $x > 0$.

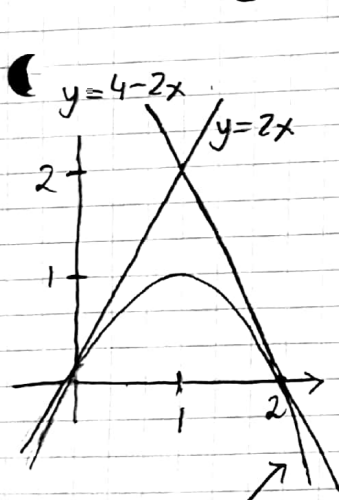
$$L'(x) = \frac{2x - \frac{32}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{16}{x^3} \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = 2$$

x	0	2		∞
L'(x)	-	0	+	
L(x)	∞	$\sqrt{8}$	$\nearrow$	∞

Vilket visar att $L(x)$ har ett minimum där $x = 2$ och då är $y = \frac{4}{x} = 2$.

Svar: Den rätvinkliga triangel, med area 2, som har kortast hypotenusa är den liksidiga triangeln med kateterna 2 (l.e.)

⑥ $y' = 2 - 2x$, $y'(0) = 2$, $y'(2) = -2$



tangent där $x = 0$: $y - 0 = 2(x - 0) \Leftrightarrow \underline{y = 2x}$

tangent där $x = 2$: $y - 0 = -2(x - 2) \Leftrightarrow \underline{y = 4 - 2x}$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Svar: tangenterna skär varandra i (1, 2)

$$y = 2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2$$

⑦ Badbollens volym är; $V(r) = \frac{4\pi}{3}r^3$

där r är radien på badbollen.

Radien beror på den tid t som gått från det att luften börjat pysa ut, dvs. $r = r(t)$.

Hastigheten med vilken volymen förändras är;

$$\frac{d}{dt}[V(r(t))] = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kedjeregeln}}}{V'(r(t))} r'(t) = 4\pi r^2 \cdot r'(t) = \pi(2r)^2 r'(t)$$

Vid det tillfälle t_0 då $d = 2r = 20$ och $r'(t_0) = -0.1$ minskar volymen med hastigheten; $-\pi \cdot 20^2 \cdot 0.1 = \underline{\underline{-40\pi}} \text{ (dm}^3/\text{h)}$

⑧ $f(x) = 2x + \frac{1}{2x+a}$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x+a)^2}$$

Om $f(x)$ skall ha ett lokalt maximum för $x=1$ så måste vi ha;

$$f'(1) = 2 - \frac{2}{(2+a)^2} = 0 \Leftrightarrow 2+a = \pm 1$$

Vi undersöker därför $f(x)$ i de två fallen $a = -1$ och $a = -3$;

$a = -1$ $D_f: x \neq \frac{1}{2}$, $f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x-1)^2}$

x	$\frac{1}{2}$		1	
f'	/	-	0	+
f	/	$-\infty$	3	$+\infty$

∴ minimum i
 $x = 1$

$a = -3$ $D_f: x \neq \frac{3}{2}$, $f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x-3)^2}$

x		1		$\frac{3}{2}$
f'	+	0	-	/
f	$+\infty$	1	$-\infty$	/

∴ maximum i
 $x = 1$

Svar: $f(x)$ har ett lokalt maximum för
 $x = 1$ då $a = -3$