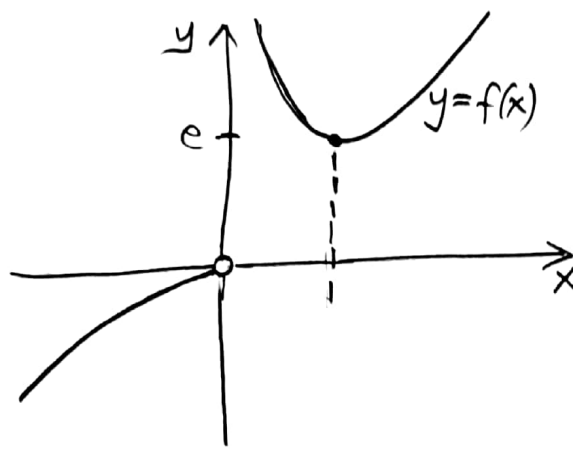




Vi avläser att ekvationen $f(x) = C$ har

$$\begin{cases} 2 \text{ lösningar om } C > e \\ 1 \text{ lösning om } C = e \text{ eller } C < 0 \\ \text{inga lösningar om } 0 \leq C < e \end{cases}$$

b) $V_f = (-\infty, 0) \cup [e, \infty)$

c) $f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x} - (1 - \frac{1}{x}) \frac{1}{x^2} e^{1/x} = \frac{1}{x^3} e^{1/x}$

x		0		
f''(x)	-	0	+	

Kurvan är konvex där $x > 0$ och konkav där $x < 0$.

Uppg 6 $f'(a) = \frac{-1}{a^2}$

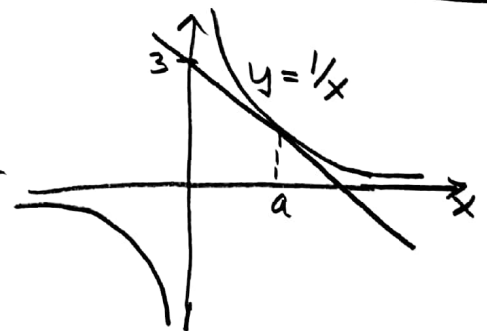
Tangenten genom $(a, \frac{1}{a})$ är

$$y - \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}(x - a)$$

Den går genom $(0, 3)$ om

$$3 - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

∴ Det finns bara en tangent som går genom $(0, 3)$ och det är $y - \frac{3}{2} = \frac{-9}{4}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = 3 - \frac{9}{4}x$



Lösningsförslag till tentan 14/4-2020
prod. regeln & kedjeregeln

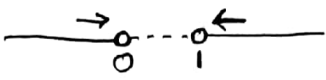
Uppg 1 a) $D[\sin 2x \cdot \cos 2x] \overset{\downarrow}{=} 2 \cos 2x \cdot \cos 2x -$
 $- 2 \sin 2x \cdot \sin 2x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 2\cos 4x$

b) $D\left[\frac{x^2+1}{x^2+3x+2}\right] \overset{\text{kvotregeln}}{\downarrow} = \frac{2x(x^2+3x+2) - (x^2+1)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} =$
 $= \frac{3x^2+2x-3}{(x^2+3x+2)^2}$

c) $D\left[\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right] \overset{\text{Kedje-}}{\uparrow} \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)^2} D\left[\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right] \overset{\text{Kedje-}}{\uparrow}$
 $= \frac{1}{1+\frac{x+1}{x+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} D\left[\frac{x+1}{x+2}\right] \overset{\text{kvotregeln}}{\downarrow}$
 $= \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{2(2x+3)\sqrt{x+1}} \cdot \frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{2(2x+3)\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}}$

Uppg 2 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}}{h} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+h+1}}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}} =$
 $= \frac{x+1 - (x+h+1)}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+h+1})} = \frac{-h}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+h+1})} =$
 $= \frac{-1}{\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+h+1})} \xrightarrow{\text{då } h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}} = f'(x)$

uppg 3 a) $x^2 - x = x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ eller $x > 1$

$D_f = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ 

$f(x) = 3x + 2 \ln(x^2 - x) \rightarrow -\infty$, då $x \rightarrow 0^-$
och då $x \rightarrow 1^+$.

$\therefore x=0$ och $x=1$ är lodräta asymptoter

b) $f(x) = 3x + 2 \ln(x^2 - x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$

$f(x) = 3x + 2 \ln(x^2 - x) = x \left(3 + 2 \frac{\ln(x^2(1 - \frac{1}{x}))}{x} \right) =$

$= x \left(3 - \underbrace{\frac{4 \ln|x|}{|x|}}_{\rightarrow 0 \text{ enl. 54v}} + 2 \underbrace{\frac{\ln(1 - \frac{1}{x})}{x}}_{\rightarrow 0} \right) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$

$\frac{f(x)}{x} = 3 - \frac{4 \ln|x|}{|x|} + 2 \frac{\ln(1 - \frac{1}{x})}{x} \rightarrow 3$ då $x \rightarrow \pm \infty$

$f(x) - 3x = 2 \ln(x^2 - x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \pm \infty$

$\therefore$ kurvan har inga vågräta eller sneda asymptoter.

c) $f'(x) = 3 + 2 \frac{2x-1}{x^2-x} = \frac{3(x^2-x) + 2(2x-1)}{x^2-x} =$

$= \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - x} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{2}{3}} = \frac{-1 \pm 5}{6}$

$\Leftrightarrow x = -1$ eller $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

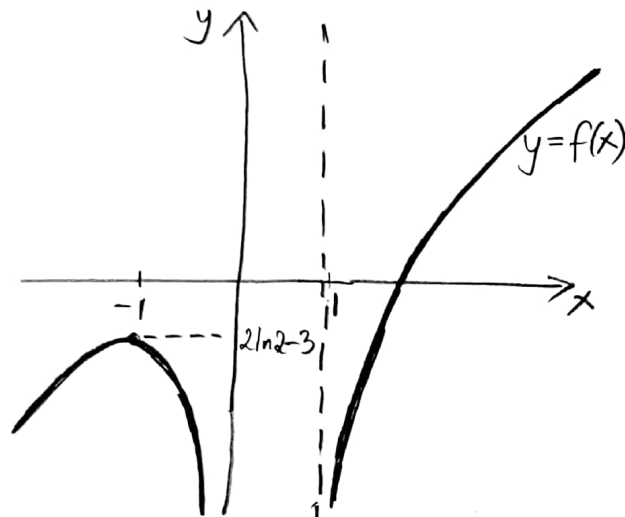
Eftersom $\frac{2}{3} \notin D_f$ så är $x = -1$ den enda kritiska punkten i D_f .

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$	$\frac{e_i}{d \cdot f}$	$-\infty$	$\nearrow$	∞

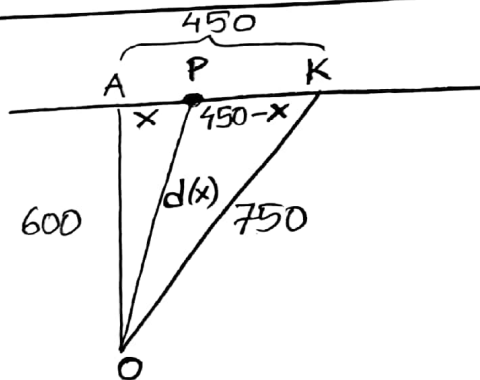
$$f'(x) = \frac{3(x+1)(x-\frac{2}{3})}{x(x-1)}$$

$$f(-1) = 2\ln 2 - 3 \quad (< 0)$$

d)



uppg 4



Med x och $d(x)$ som i figuren ovan är;
 $d(x)^2 = x^2 + 600^2$. I lämplig tidsenhet är
 tiden det tar för orienteraren att nå
 kontrollen;

$$t(x) = \frac{1}{6}d(x) + \frac{1}{10}(450-x) = \frac{1}{6}\sqrt{x^2+600^2} + \frac{1}{10}(450-x)$$

så

$$t'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+600^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 10x = 6\sqrt{x^2+600^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 = 6^2(x^2 + 600^2) \Leftrightarrow 8x^2 = 6^2 \cdot 600^2 \Leftrightarrow$$

$$8x = \pm 6 \cdot 600 \Leftrightarrow x = 450.$$

$\uparrow$
 $x > 0$

Notera också att;

$$t'(x) = \frac{1}{6\sqrt{1+\frac{600^2}{x^2}}} - \frac{1}{10} < 0 \text{ då } x < 450$$

så orienteraren skall alltså springa
direkt mot kontrollen.

Uppg 5 a) $D_f: x \neq 0$

$$f(x) = x e^{1/x} \rightarrow -\infty \text{ då } x \rightarrow -\infty$$

$$f(x) = x e^{1/x} \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty$$

$$f(x) = x e^{1/x} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0^-$$

$\xrightarrow{\infty} 0 \quad \xrightarrow{0} 0 \quad t = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$

$$f(x) = x e^{1/x} \xrightarrow{\infty} 0 \quad \xrightarrow{0} \infty = \frac{1}{\frac{t}{e^t}} \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow 0^+$$

$\rightarrow 0^+$
 enl. SGV

$$f'(x) = e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		0		1		∞
$f'(x)$		+		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\infty}{0}$	$\searrow$	e	$\nearrow$	∞