

Lösningsförslag till tentan 19/3-2020

prod. regeln

uppg 1 a) $D[x \ln(2x+1)] = \ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1}$

kvot regeln

b) $D\left[\frac{\cos x - 1}{\sin x - 1}\right] = \frac{-\sin x(\sin x - 1) - (\cos x - 1)\cos x}{(\sin x - 1)^2} =$
 $= \frac{\sin x + \cos x - 1}{(\sin x - 1)^2}$

kedjeregeln

c) $D[\sqrt{\arctan(x^2)}] = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x^2)}} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x =$
 $= \frac{x}{(1+x^4)\sqrt{\arctan(x^2)}}$

uppg 2

$$xy^3 + \sqrt{xy} = 2, \quad P = (1, 1)$$

Implicit derivering ger;

$$y^3 + 3xy^2y' + \frac{1}{2\sqrt{xy}}(y + xy') = 0$$

Med $x=1, y=1$ i denna ekv. får vi;

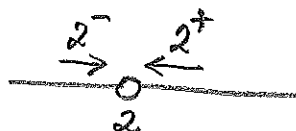
$$1 + 3y' + \frac{1}{2}(1 + y') = 0 \Rightarrow \frac{7}{2}y' = \frac{-3}{2} \Rightarrow y' = \frac{-3}{7}$$

Normalen har således riktningskoeff. $k_N = \frac{7}{3}$
och därmed ekvationen;

$$y - 1 = \frac{7}{3}(x - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}}}$$

Uppg 3 $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

a) $D_f: x \neq 2$



$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow 2^\pm$$

$\therefore x=2$ är lodrät asymptot till kurvan

b)

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{x}{(1-\frac{2}{x})^2} \rightarrow \infty, \text{ då } x \rightarrow \infty$$

$$\rightarrow -\infty, \text{ då } x \rightarrow -\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{x(x-2)^2} = \frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{1}{(1-\frac{2}{x})^2} \rightarrow 1, \text{ då } x \rightarrow \pm\infty$$

$$f(x) - kx = \frac{x^3}{(x-2)^2} - x = \frac{x^3 - x(x-2)^2}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{4 - \frac{4}{x}}{(1-\frac{2}{x})^2} \rightarrow 4, \text{ då } x \rightarrow \pm\infty$$

$\therefore y = x + 4$ är sned asymptot då $x \rightarrow \pm\infty$

c) $f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2) - 2x)}{(x-2)^4}$

$$= \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x=6$$

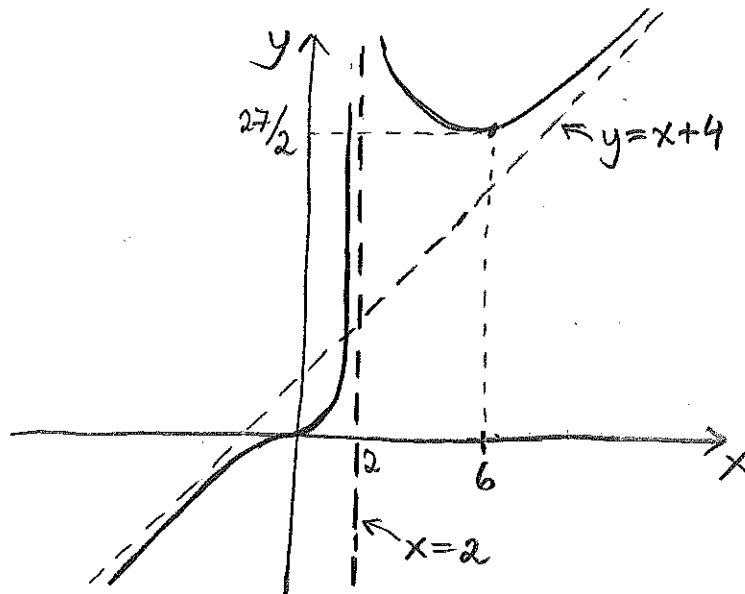
$\therefore x=0$ och $x=6$ är kritiska punkter till $f(x)$

x	$-\infty$	$<$	0	$<$	2	$<$	6	$<$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞/∞	$\searrow$	$27/2$	$\nearrow$	∞

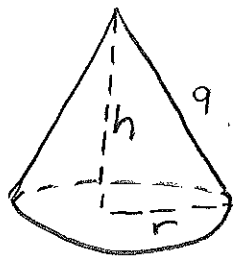
(Anm. Följande lite mindre teckentabell duger också bra för full poäng på denna deluppg.)

x	$<$	0	$<$	2	$<$	6	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$\searrow$	$-$	0	$+$

d)



uppg 4



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$h^2 + r^2 = q^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi h (81 - h^2)$$

$V(h)$

$$0 < h < 9$$

$$V'(h) = \frac{1}{3} \pi (81 - 3h^2) = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$$

x	0		$3\sqrt[3]{3}$		9
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$	0	$\nearrow$	$54\pi\sqrt[3]{3}$	$\searrow$	0

$$h = 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow r = 3\sqrt[3]{6}$$

Svar: Konens volym blir som störst då höjden är $3\sqrt[3]{3}$ m och radien $3\sqrt[3]{6}$ m.

uppg 5 a) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = x e^{-x} \rightarrow -\infty \text{ då } x \rightarrow -\infty$$

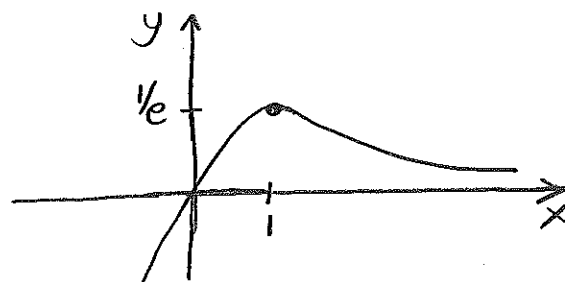
$$f(x) = x e^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0, \text{ då } x \rightarrow \infty$$

$\uparrow$
 SGV

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x=1$$

kritisk punkt.

x	$-\infty$		1		∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0



Svar: $\begin{cases} 2 \text{ lösningar om } 0 < C < 1/e \\ 1 \text{ lösning om } C = 1/e \text{ eller } C \leq 0 \\ \text{inga lösningar om } C > 1/e \end{cases}$

b) Svar: $V_f = (-\infty, 1/e]$

$$c) f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x=2$$

x	< 2	2	> 2
$f''(x)$	-	0	+

Svar: Kurvan är konkav på intervallet $(-\infty, 2]$ och konvex på intervallet $[2, \infty)$.

Uppg 6 För att $f(x)$ skall vara deriverbar i $x=2$ krävs att;

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 2b - 2 \\ 4a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

Svar: $f(x)$ blir deriverbar i $x=2$ om $a = \frac{1}{2}$ och $b = 2$