

Matematik del B, Tekniskt basår

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd, linjal, pennvässare.

Max poäng: 50 poäng.

Betygsgränser (inklusive bonuspoäng): betyg 3: 20 p. betyg 4: 30 p. betyg 5: 40 p.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. Endast svar ger inga poäng. Motivera och förklara så bra du kan.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlistan och på inlämnade papper. Börja varje ny uppgift på ett nytt svarpapper.

1. Betrakta funktionen (6p)

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}.$$

Bestäm funktionens invers f^{-1} , samt ange inversens definitionsmängd $D_{f^{-1}}$ och värdemängd $V_{f^{-1}}$.

Lösning:

Vi ser direkt att f har definitionsmängd $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Så för $x \neq 1$ finner vi inversen:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x + 3}{x - 1} \\ y(x - 1) &= 2x + 3 \\ yx - y - 2x - 3 &= 0 \\ x(y - 2) &= y + 3 \\ x &= \frac{y + 3}{y - 2} = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Därmed är inversen $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-2}$. Observera att definitionsmängden för f^{-1} är $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Vi har också $V_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Funktionsgrafen till funktionen $f(x) = Ce^{kx}$, där $x \in \mathbb{R}$, går genom punkterna $(0, 1)$ och $(1, 10)$. Bestäm parametrarna C och k . Med dessa parametervärden, lös $f(x) = 5$. (3p)

Lösning: I punkten $(0, 1)$ har vi alltså att $x = 0$ och $f(x) = 1$.
Det ger oss

$$Ce^{k \cdot 0} = 1 \implies C = 1.$$

Nästa punkt på funktionsgrafen är $(1, 10)$, som ger

$$10 = Ce^{k \cdot 1} = e^k.$$

Alltså måste $k = \ln 10$. Med dessa värden ska vi lösa $f(x) = 5$, d.v.s.

$$e^{(\ln 10) \cdot x} = 5.$$

Då vi logariterar höger- och vänsterled får vi $x \ln 10 = \ln 5$.
Alltså får vi svaret

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 10}.$$

3. (a) Skriv talen $z_1 = \sqrt{3} + i$ och $z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i$ på polär form, (3p)
och multiplicera dem sedan. Produkten ska anges i polär form.
- (b) Lös ekvationen $z^6 + 64 = 0$. Ange lösningarna i rektangulär/rätvinklig form. (3p)

Lösning:

- (a) Vi räknar ut absolutbelopp och argument för de två talen:

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\arg(\sqrt{3} + i) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6$$

respektive

$$|2 - 2\sqrt{3}i| = \sqrt{2^2 + 2^2 \cdot 3} = 4$$

$$\arg(2 - 2\sqrt{3}i) = \arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) = -\pi/3.$$

Detta ger oss produkten

$$z_1 \cdot z_2 = 2e^{i\pi/6} \cdot 4e^{-i\pi/3} = 8e^{-i\pi/6}.$$

- (b) Vi skriver om som $z^6 = -64$. Högerledet kan skrivas på polär form som $64(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$. Så för $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ gäller

$$r^6 = 64 \implies r = 2$$

$$6\theta = \pi + 2\pi k \implies \theta = \frac{\pi + 2\pi k}{6}, \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

I rektangulär form får vi, för $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i,$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i,$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i,$$

$$z_5 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - i.$$

4. Lös den komplexa ekvationen $z^2 - z - 4iz - 5 + 5i = 0$. (5p)

Lösning: Vi kvadratkompletterar:

$$z^2 - z - 4iz - 5 + 5i = 0$$

$$z^2 - (1 + 4i)z - (5 - 5i) = 0$$

$$\left(z - \frac{1 + 4i}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 + 4i}{2} \right)^2 - (5 - 5i) = 0$$

$$\left(z - \frac{1 + 4i}{2} \right)^2 - \frac{-15 + 8i}{4} - \frac{20 - 20i}{4} = 0$$

$$\left(z - \frac{1 + 4i}{2} \right)^2 - \frac{5 - 12i}{4} = 0$$

Låt

$$w = z - \frac{1 + 4i}{2} \tag{1}$$

och lös ekvationen

$$w^2 = \frac{5 - 12i}{4}. \tag{2}$$

Delar vi upp w i real- och imaginärdel genom $w = a + ib$ erhåller vi ekvationen $w^2 = a^2 - b^2 + 2iab = (5 - 12i)/4$. Genom att real- och imaginärdelarna måste vara lika får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{5}{4} \\ 2ab = -3 \end{cases}$$

Vi tar också hjälp av beloppet $|w|$ av ekvationen (2) ovan:

$$|w|^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{12}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + 9} = \frac{13}{4}$$

Alltså, tillsammans med $2ab = -3$ från ekvationssystemet ovan har vi

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{5}{4} \\ a^2 + b^2 = \frac{13}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = \frac{18}{4} \\ a^2 + b^2 = \frac{13}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{9}{4} \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

Alltså är antingen $a = 3/2$ och $b = -1$, eller $a = -3/2$ och $b = 1$. Sätter vi in detta i (1) för att återfå z , så erhålls lösningarna

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1 + \frac{1+4i}{2} = \frac{3}{2} - i + \frac{1+4i}{2} = 2 + i \\ z_2 &= w_2 + \frac{1+4i}{2} = -\frac{3}{2} + i + \frac{1+4i}{2} = -1 + 3i \end{aligned}$$

5. Bestäm exakt (3p)

(a) $\sin(-15^\circ)$

(b) $\cos(195^\circ)$

Lösning:

(a) Vi räknar

$$\begin{aligned} \sin(-15^\circ) &= \sin(30^\circ - 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ - \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \cos(195^\circ) &= \cos(180^\circ + 15^\circ) = \cos 180^\circ \cos 15^\circ - \sin 180^\circ \sin 15^\circ \\ &= -\cos 15^\circ \\ &= -\cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= -(\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ) \\ &= -\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

6. Lös (12p)

- (a) $\cos(5v) = \sin(4v)$
- (b) $2 \cos^2(x) + 6 \sin^2(x) = 5$
- (c) $x = \sin x$
- (d) $\ln((x+2)^3) = \ln(x+2)$

Lösning:

- (a) Skriv först om ekvationen så att det är antingen bara sin eller bara cos. Det kan alltså se lite olika ut beroende på hur vi börjar. Men vi använder att $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$ den här gången. Då får vi

$$\cos(5v) = \sin(4v) = \cos(\pi/2 - 4v)$$

vilket har lösningarna

$$5v = \pm(\pi/2 - 4v) + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vi delar upp detta i respektive fall:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 5v = \pi/2 - 4v + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 5v = -\pi/2 + 4v + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} 9v = \pi/2 + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ v = -\pi/2 + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} v = \pi/18 + 2\pi k/9, & k \in \mathbb{Z} \\ v = -\pi/2 + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Detta är svaret. Det är en lösningsmängd, och den kan skrivas på några olika sätt.

- (b) Vi kan skriva om och får

$$\begin{aligned} 2 \cos^2(x) + 6 \sin^2(x) &= 5 \\ 2(1 - \sin^2(x)) + 6 \sin^2(x) &= 5 \\ 4 \sin^2(x) &= 3 \\ \sin^2(x) &= \frac{3}{4} \\ \sin(x) &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Då $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ får vi lösningarna $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ och $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ där $k \in \mathbb{Z}$. Då $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ får vi $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ och $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$.

- (c) Den här är lite lurig. Ni kommer kanske ihåg att vi bevisade att

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{ifall } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Det betyder att $\sin x \neq x$ så länge $x \neq 0$. Om $|x| \geq \pi/2$ så är ju ändå $-1 \leq \sin x \leq 1$ för alla reella x . Den enda lösningen är alltså $x = 0$.

- (d) Vi ska lösa ekvationen med logaritmlagarna:

$$\ln((x+2)^3) - \ln(x+2) = 0$$

$$\ln\left(\frac{(x+2)^3}{(x+2)}\right) = 0$$

$$\ln((x+2)^2) = 0$$

$$(x+2)^2 = 1$$

Nu måste vi komma ihåg att ekvationen i fråga är definierad för $x > -2$, eftersom logaritmen är definierad för positiva tal. Ekvationen $(x+2)^2 = 1$ har annars två lösningar, $x = -1$ och $x = -3$, men det är bara $x = -1$ som är en lösning till den ursprungliga ekvationen.

7. Beräkna följande gränsvärden

(6p)

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)(2x^2+1)}{x^3+4x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+2x}{3x^2-x}$

Lösning:

- (a) Funktionen är kontinuerlig så vi sätter in värdet $x = 2$ och får

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x = 2^2 + 2^2 = 8$$

- (b) Vi skriver om och får

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)(2x^2+1)}{x^3+4x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^3 + 4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} \\ &= \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

(c) Här ser vi att täljaren har högre grad än nämnaren så

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x}{3x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5 + \frac{2}{x^2}}{3\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) = \infty$$

Detta kan man se bland annat från sats 5.2.3 på sidan 131 i boken.

8. Formulera Eulers formler. Bevisa en av dem. (4p)

9. Formulera och bevisa cosinussatsen. (5p)

Lycka till!!
Adam och Carl-Joar