

Matematik del B, Tekniskt basår

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd, linjal, pennvässare.

Max poäng: 50 poäng.

Betygsgränser (inklusive bonuspoäng): betyg 3: 20 p. betyg 4: 30 p. betyg 5: 40 p.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. Endast svar ger inga poäng. Motivera och förklara så bra du kan.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlistan och på inlämnade papper.

1. (a) Ange den maximala definitionsmängden för funktionen (2p)
som beskrivs av

$$f(x) = -3 + 2\sqrt{\frac{1}{5}x + 1}.$$

- (b) Bestäm motsvarande värdemängd. (1p)

- (c) Bestäm funktionens inversa funktion. (3p)

Lösning: Med en funktion på ett intervall av $\mathbb{R}$ kan vi sätta $y = f(x)$ och lösa ut x . Först ska vi förstås bestämma definitions- och värdemängd: Funktionsuttrycket är väldefinerat om $\sqrt{\frac{1}{5}x + 1}$ är definierat. Det vill säga, vi måste kräva $x \geq -5$. Eftersom $\sqrt{\frac{1}{5}x + 1} \geq 0$ är också $f(x) \geq -3$, vilket ger oss värdemängden. Slutsats:

$$f : D \rightarrow V, \quad \text{där } D = [-5, \infty), \quad V = [-3, \infty).$$

Nu löser vi ut x ur $y = f(x)$.

$$y = -3 + 2\sqrt{\frac{1}{5}x + 1}$$

$$y + 3 = 2\sqrt{\frac{1}{5}x + 1}$$

$$\frac{1}{4}(y + 3)^2 = \frac{1}{5}x + 1 \quad (x \geq -5)$$

$$\frac{1}{4}(y + 3)^2 - 1 = \frac{1}{5}x$$

$$\frac{5}{4}(y + 3)^2 - 5 = x$$

Så,

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{4}(x + 3)^2 - 5, \quad x \in [-3, \infty).$$

2. Förenkla följande uttryck

(a) $3^{\log_9(17)}$ (2p)

(b) $\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{3} \ln(8) + \frac{1}{2} \ln(2e^2)$ (2p)

Lösning:

(a) Vi har

$$\begin{aligned} 3^{\log_9(17)} &= (9^{1/2})^{\log_9(17)} \\ &= 9^{\frac{1}{2} \log_9(17)} \\ &= 9^{\log_9(17^{1/2})} \\ &= 17^{1/2} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

(b) Här kan vi skriva

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{3} \ln(8) + \frac{1}{2} \ln(2e^2) &= \ln(\sqrt{2}) - \ln(8^{1/3}) + \ln((2e^2)^{1/2}) \\ &= \ln(\sqrt{2}) - \ln(2) + \ln(\sqrt{2}e) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}e}{2}\right) \\ &= \ln(e) = 1 \end{aligned}$$

3. (a) Låt $z = 2 + i$. Bestäm talet $1/z$ genom att ange real- och imaginärdel. (2p)

(b) Visa att (3p)

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{6} \implies |z - 3| = 3.$$

(c) Beskriv den geometriska kurva som $|z - 3| = 3$ är i det komplexa talplanet. Rita en bild och förklara med ord. (1p)

Lösning:

(a) Vi har

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{2 - i}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i}{5}$$

så realdelen är $2/5$ medan imaginärdelen är $-1/5$.

(b) Låt $z = x + iy$. På samma sätt som i (a)-uppgiften har vi

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

så realdelen är lika med $x/(x^2 + y^2)$. Att den är lika med $1/6$ betyder således att

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2 + y^2} &= \frac{1}{6} \\ 6x &= x^2 + y^2 \\ 0 &= x^2 - 6x + y^2 \\ 0 &= x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 \\ 0 &= (x - 3)^2 - 9 + y^2 \\ 3^2 &= (x - 3)^2 + y^2 \\ 3 &= \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = |z - 3|\end{aligned}$$

(c) Ekvationen $3 = |z - 3|$ beskriver en cirkel med radien 3 och medelpunkt i $z_0 = 3$ (alltså på realaxeln).

4. Lös följande ekvationer (4p)

(a) $\cos(2x) + \sin^2(x) - \cos(x) - 2 = 0$

(b) $\tan(v) = \sin(2v)$

Lösning:

(a) Vi använder $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ och $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ och får

$$\begin{aligned}\cos(2x) + \sin^2(x) - \cos(x) - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ 2\cos^2(x) - 1 + (1 - \cos^2(x)) - \cos(x) - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \cos^2(x) - \cos(x) - 2 &= 0\end{aligned}$$

Vi sätter $u = \cos(x)$ och får då ekvationen $u^2 - u - 2 = 0$. Lösningar ges av $u = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, så $u = -1$ och $u = 2$. Fallet $u = 2$ saknar lösningar. För $u = -1$ har vi $\cos(x) = -1$ som har lösningar $x = \pm\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Svaret är alltså att ekvationen har lösningar $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (plus och minus fallen är ekvivalenta).

- (b) Per definition är $\tan(v) = \sin(v)/\cos(v)$. Tangen är inte definierat på $x = k\pi/2$, där k är ett udda heltal, så det får vi inte glömma. Vi räknar:

$$\sin(v)/\cos(v) = \sin(2v)$$

$$\sin(v)/\cos(v) = 2\sin(v)\cos(v)$$

$$\sin(v) = 2\sin(v)\cos^2(v) \quad (v \neq \pm\pi/2)$$

$$0 = 2\sin(v)\cos^2(v) - \sin(v) \quad (v \neq \pm\pi/2)$$

$$0 = (2\cos^2(v) - 1)\sin(v) \quad (v \neq \pm\pi/2)$$

$$0 = \cos(2v)\sin(v) \quad (v \neq \pm\pi/2)$$

Då har vi antingen att $0 = \cos(2v)$ eller $0 = \sin(v)$. Lösningarna är alltså, i respektive fall,

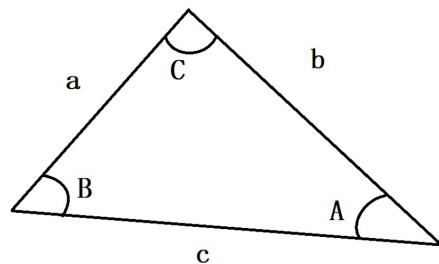
$$2v = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad v = k\pi.$$

Alltså,

$$v = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad v = k\pi.$$

Vi ser att inga lösningar är de förbjudna värdena $k\pi/2$ för udda k , där tangens inte är definierat.

5. (a) Beräkna arean av triangeln där $a = 4$, $b = 6$ och $C = 60^\circ$. (2p)
 (b) Formulera och bevisa sinussatsen. (4p)



Lösning:

- (a) Areasatsen ger

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{ab \sin(C)}{2} \\ &= \frac{4 \cdot 6 \cdot \sin(60^\circ)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} 2 \\
&= 6\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Arean är alltså $6\sqrt{3}$ area enheter.

(b) För bevis, se läroboken s. 45

6. (a) Lös ekvationen $z^4 + z^3 + 13z^2 + 47z + 34 = 0$ då man vet att en komplex rot har realdel 1. (5p)

(b) Skriv som en produkt av reella faktorer av lägsta möjliga grad (faktorer med reella koefficienter). (1p)

Lösningar:

(a) Eftersom polynomet har reella koefficienter kommer komplexa rötter i konjugat-par. Därmed har vi två rötter på formen $z_1 = 1 + bi$ och $z_2 = 1 - bi$. Multiplicerar vi ihop dessa får vi

$$(z - 1 - bi)(z - 1 + bi) = z^2 - 2z + 1 + b^2$$

Vi sätter $1 + b^2 = k$. Sedan söker vi det okända andragradspolynomet $(z^2 + cz + d)$ som uppfyller

$$z^4 + z^3 + 13z^2 + 47z + 34 = (z^2 - 2z + k)(z^2 + cz + d)$$

Vi multiplicerar ihop och får

$$\begin{aligned}
(z^2 - 2z + k)(z^2 + cz + d) &= z^4 + cz^3 + dz^2 - 2z^3 \\
&\quad - 2cz^2 - 2dz + kz^2 + ckz + dk \\
&= z^4 + z^3(c - 2) \\
&\quad + z^2(d - 2c + k) + z(-2d + ck) + dk
\end{aligned}$$

Genom att matcha koefficienter får vi följande ekvationer

$$\begin{cases} 1 = c - 2 \\ 13 = d - 2c + k \\ 47 = -2d + ck \\ 34 = dk \end{cases}$$

Vi får $c = 3$. Insättning i ekvation 2 ger $d = 19 - k$. Insättning av detta i ekvation 3 ger oss

$$47 = -2(19 - k) + 3k \Leftrightarrow 85 = 5k \Leftrightarrow k = 17$$

Därefter får vi $d = 19 - 17 = 2$. Vi har därmed funnit att de två andragradspolynomen ges av

$$z^4 + z^3 + 13z^2 + 47z + 34 = (z^2 - 2z + 17)(z^2 + 3z + 2)$$

Vi skrev tidigare att $1 + b^2 = k$ så $b = \pm 4$. Därmed är de två komplexa rötterna i konjugatpar $1 + 4i$ och $1 - 4i$. Slutligen löser vi nu $(z^2 + 3z + 2) = 0$:

$$\begin{aligned} (z^2 + 3z + 2) = 0 &\Leftrightarrow \\ z = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} &\Leftrightarrow \\ z = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} &\Rightarrow z_3 = -2, \quad z_4 = -1 \end{aligned}$$

- (b) För att skriva som en produkt av reella faktorer lägger vi märke till att vi behöver skriva om $(z - 1 - 4i)(z - 1 + 4i) = z^2 - 2z + 17$. Därmed har vi

$$z^4 + z^3 + 13z^2 + 47z + 34 = (z^2 - 2z + 17)(z + 1)(z + 2)$$

7. Bestäm följande gränsvärden. Avgör ifall de är ett reellt tal, minus eller plus oändligheten eller odefinierade. (6p)

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(2x) + 2\sin^2(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1 - x}{\sqrt{1 - 2x + x^2}}$

Lösning:

- (a) Om $x \neq 2$ gäller att

$$\begin{aligned} \frac{2 - x}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{x})(\sqrt{2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = -(\sqrt{2} + \sqrt{x}) \end{aligned}$$

Därför blir

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = -(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$$

- (b) Här visar det sig att uttrycket är en konstant. Med trigonometriska ettan får vi

$$\begin{aligned}\cos(2x) + 2\sin^2(x) &= \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x = 1.\end{aligned}$$

Därför blir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(2x) + 2\sin^2(x) = 1.$$

- (c) Eftersom $\sqrt{1 - 2x + x^2} = \sqrt{(1 - x)^2} = |1 - x|$ gäller att

$$x > 1 \implies \frac{1 - x}{\sqrt{1 - 2x + x^2}} = \frac{1 - x}{|1 - x|} = \frac{1 - x}{-(1 - x)} = -1.$$

Därför blir

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1 - x}{\sqrt{1 - 2x + x^2}} = -1.$$

8. Betrakta funktionen

(6p)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{då } x \leq 2 \\ ax + b & \text{då } 2 < x \leq 3 \\ 13 - x^2 & \text{då } x > 3 \end{cases}$$

Hitta $a, b \in \mathbb{R}$ så att funktionen blir kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$. Motivera med beräkningar, och skissa grafen.

Lösning: Kontinuitet kräver att funktionen är kontinuerlig i alla punkter i sin domän. Det förekommer inga problem förutom eventuellt då $x = 2$ och $x = 3$. I dessa punkter krävs att höger och vänster gränsvärde existerar och är lika med funktionsvärdet i respektive punkt.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = x^2 + 1 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = ax + b = 2a + b$$

så från första punkten får vi kravet $2a + b = 5$. För punkter $x = 3$ har vi

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = ax + b = 3a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 13 - x^2 = 4$$

Så andra kravet blir $3a + b = 4$. Tillsammans får vi $a = -1$ och $b = 7$.

9. Använd ε - δ definitionen av gränsvärde för att visa att (6p)

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x + 2 = 8$$

Lösning: Vi vill visa att det för godtyckligt $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ som säkerställer att

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |2x + 2 - 8| < \varepsilon$$

Vi ser att

$$|2x + 2 - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|2x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$2|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Alltså ser vi att för ett givet $\varepsilon > 0$ kan vi välja $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ så gäller implikationen! Eftersom detta kan göras på samma sätt för godtyckliga $\varepsilon > 0$ gäller gränsvärdet.

Lycka till!!
Adam och Carl-Joar