

MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista.**

Betygsgränser: För godkänt på tentan krävs 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 32 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamen (utav 50p).

Hjälpmedel: Formler utdelade med tesen (tryckta på baksidan). Inga miniräknare är tillåtna.

Lösningförslag publiceras på kurshemsidan.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker.

1. Bestäm definitionsmängderna till följande funktioner:

(a) $f(x) = \ln \sqrt{2x-1}$, (2p)
 $\sqrt{(2x-1)} > 0$ och $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$.
 $D_f = (\frac{1}{2}, \infty)$

(b) $g(x) = \sin(\ln(x^2 + 2x + 2))$. (2p)
 Observera att $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$, så $\ln(x^2 + 2x + 2)$ är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$. Sinusfunktion är ju definierad för all $x \in \mathbb{R}$. Vi får $D_g = \mathbb{R}$.

2. Låt $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$.

(a) Bestäm definitionsmängden till $f(x)$. (2p)
 $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$, och $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$.
 $D_f = (-1, \infty) \cap (-2, \infty) = (-1, \infty)$.

(b) Bestäm formeln till inversen av $f(x)$. (3p)
 $y = \ln(x+1) - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \Rightarrow e^y = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow (x+2)e^y = x+1 \Rightarrow$
 $x(e^y - 1) = 1 - 2e^y \Rightarrow x = \frac{1-2e^y}{e^y-1}$.
 $f^{-1}(x) = \frac{1-2e^x}{e^x-1}$

(c) Bestäm x , om det existerar, så att:

i. $f(x) = \ln \frac{1}{2}$ (1p)
 Om x existerar så är $x = f^{-1}(\ln \frac{1}{2}) = \frac{1-2e^{\ln \frac{1}{2}}}{e^{\ln \frac{1}{2}}-1} = \frac{0}{0.5-1} = 0$.

ii. $f(x) = \ln 2$ (1p)
 Om x existerar så är $x = f^{-1}(\ln 2) = \frac{1-2e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}-1} = \frac{1-4}{2-1} = -3 \notin D_f$. Så är ekvationen olösbar.

3. Beräkna

(a) $\cos \frac{\pi}{12}$ (2p)
 $\cos \frac{\pi}{12} = \cos(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} =$
 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$$(b) \tan \frac{5\pi}{12} \quad (2p)$$

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

4. Beräkna följande gränsvärdena:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4+x^2} \sin(3x)}{\sin(2x) \cos(4x)} + 12 \right). \quad (3p)$$

Enligt summa, produkt och kvotregler för gränsvärden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4+x^2} \sin(3x)}{\sin(2x) \cos(4x)} + 12 \right) &= 12 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x^2}}{\cos(4x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} \\ &= 12 + 2 \cdot \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} \\ &= 15. \end{aligned}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 - 2} - 2x + 1. \quad (4p)$$

Vi använder konjugat trick för att analysera uttrycket:

$$\sqrt{4x^2 - 2} - (2x - 1) = \frac{(4x^2 - 2) - (2x - 1)^2}{\sqrt{4x^2 - 2} + 2x - 1} = \frac{4x^2 - 2 - 4x^2 + 4x - 1}{2|x| \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2x^2}} \right) + 2x(1 - \frac{1}{2x})}.$$

Om $x \rightarrow \infty$, vi får anta att $x > 0$, så att $2|x| = 2x$. Alltså

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 - 2} - (2x - 1) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 3}{2x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2x^2}} + 1 - \frac{1}{2x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{2x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2x^2}} + 1 - \frac{1}{2x}} = 1. \end{aligned}$$

$$5. \text{ Bestäm } a \text{ så att } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x} + \frac{a}{x^2-1} \right) \text{ existerar och beräkna gränsvärdet.} \quad (4p)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x} + \frac{a}{x^2-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{a}{(x-1)(x+1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x+1) + a}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(x+1) = 0$. För att $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x} + \frac{a}{x^2-1} \right)$ existerar måste $\lim_{x \rightarrow 1} (-2(x+1) + a)$ vara noll.

$\lim_{x \rightarrow 1} (-2(x+1) + a) = -4 + a = 0$. Alltså $a = 4$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x} + \frac{4}{x^2-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x+1) + 4}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x + 2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+1)} = -1 \end{aligned}$$

VÄND!

6. Lös följande ekvationerna (a) till (c) för $x \in \mathbb{R}$, och ekvationerna (d) och (e) för $z \in \mathbb{C}$.

(a) $\lg(2 \ln x - 6) = 1$ (2p)

Eftersom $\lg 10 = 1$, måste vi ha $2 \ln x - 6 = 10$, som ger $2 \ln x = 16$, och förenklas till $\ln x = 8$; dvs. $x = e^8$.

(b) $\sin(2x) = \cos x$ (3p)

$$\sin(2x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \text{ Alltså, } 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x + 2n\pi \\ \text{eller} \\ \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2n\pi \end{cases}, \text{ för } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x + 2n\pi \\ \text{eller} \\ \frac{\pi}{2} + x + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}n\pi \\ \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases}$$

(c) $e^{2x} - 4e^x = 5$ (3p)

$e^{2x} - 4e^x = 5 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$. Låt $t = e^x$. Ekvationen kan skrivas $t^2 - 4t - 5 = 0$. Så är $t = -1$ eller $t = 5$.
 $t = -1$ är en orimlig rot eftersom $t = e^x > 0$.
 $t = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$.

(d) $(z + 2)^4 = 1$ (4p)

Vi skriver $w = re^{it} = z + 2$. Vi vill ha

$$w^4 = r^4 e^{i4t} = e^{in2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ t = \frac{n2\pi}{4} = \frac{n\pi}{2} \end{cases}$$

Det ger oss fyra lösningar

$$w_0 = 1, w_1 = e^{i\pi/2} = i, w_2 = e^{i2\pi/2} = e^{i\pi} = -1, w_3 = e^{i3\pi/2} = -i.$$

När vi skriver för z , får vi

$$\begin{array}{ll} z_0 = -1 & z_1 = i - 2 \\ z_2 = -3 & z_3 = -i - 2 \end{array}$$

(e) $2iz^2 - iz = e^{i\frac{\pi}{2}}$ (2p)

$$2iz^2 - iz = e^{i\frac{\pi}{2}} = i. \text{ Dela med } 2i.$$

$$z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0.$$

$$\text{Alltså } z = 1 \text{ eller } z = -\frac{1}{2}$$

7. (a) Formulera areasatsen. (2p)

(b) Bevisa areasatsen för spetsiga och trubbiga vinklar. (4p)

Samma som boken.

8. Låt $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{då } x < 4 \text{ och } x \neq 2 \\ 5 & \text{då } x = 2 \\ (x^2 - 10)^2 & \text{då } x \geq 4 \end{cases}.$

(a) Avgör om gränsvärdet av $f(x)$ existerar då (2p)

i. x går mot 2,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Gränsvärdet existerar.

ii. x går mot 4.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{16 - 4}{4 - 2} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 - 10)^2 = (16 - 10)^2 = 36 \neq 6$$

Gränsvärdet existerar inte.

(b) Avgör om $f(x)$ är kontinuerlig i (2p)

i. $x = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \neq f(2) \text{ så är } f \text{ INTE kontinuerlig i } x = 2.$$

ii. $x = 4$. Eftersom $\lim_{x \rightarrow 4}$ existerar inte så f INTE kontinuerlig i $x = 4$.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker.

Formelblad

Additions-och subtraktionsformlerna för de trigonometriska funktionerna

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

OBS: När det står flera $\pm$ och/eller $\mp$ i en formel så svarar de övre tecknena mot varandra och de undre tecknena mot varandra. (Man ska alltså inte kombinera övre tecknet på ena ledet med undre tecknet på andra ledet.)

Formler för dubbla vinkeln

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \cot \alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$