

MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista.**

Betygsgränser: För godkänt på tentan krävs 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 32 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamen (utav 50p).

Hjälpmedel: Formler utdelade med tesen (tryckta på baksidan). Inga miniräknare är tillåtna. **Lösningssförslag** publiceras på kurshemsidan.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker.

1. Bestäm definitionsmängderna till följande funktioner:

(a) $f(x) = \ln \frac{2x-3}{x-5}$, (3p)
 $\frac{2x-3}{x-5} > 0$

x	1.5			5	
$2x-3$	-	0	+		+
$x-5$	-		-	0	+
$\frac{2x-3}{x-5}$	+	0	-		+

Alltså $D_f = (-\infty, 1.5) \cup (5, +\infty)$

(b) $g(x) = \ln(x) - \ln(-x) + \lg((-x)^6) - \sin(x^3 - 1) + \sqrt{2345}$. (2p)
 $x > 0$ och $-x > 0 \Rightarrow x < 0$ då funktionen är odefinierad. $D_g = \emptyset$.

2. (a) Bestäm inversen till funktionen (2p)

$$f(x) = 1 + \sqrt{2-x}$$

$$y = 1 + \sqrt{2-x} \Rightarrow y-1 = \sqrt{2-x} \Rightarrow (y-1)^2 = 2-x \Rightarrow x = 2 - (y-1)^2.$$

$$f^{-1}(x) = 2 - (x-1)^2.$$

(b) Bestäm definitionsmängden och värdemängden till inversen. (2p)

Definitionsmängden till f^{-1} är värdemängden till $f(x)$.

Eftersom $\sqrt{2-x} \geq 0$ så är $1 + \sqrt{2-x} = f(x) \geq 1$.

$V_f = D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$.

Värdemängden till f^{-1} är definitionsmängden till $f(x)$.

$2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow V_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 2]$

3. Bestäm x -koordinaten till skärningspunkten mellan kurvorna $y = 2 \cdot 3^x$ och $y = 4 \cdot 2^x$. (4p)

$$2 \cdot 3^x = 4 \cdot 2^x \Rightarrow 3^x = 2 \cdot 2^x \Rightarrow \ln(3^x) = \ln(2 \cdot 2^x) = \ln 2 + \ln 2^x$$

$$\Rightarrow x \ln 3 = \ln 2 + x \ln 2 \Rightarrow x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}.$$

4. Beräkna följande gränsvärdena.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-2}{x^2-3x+2}. \quad (1p)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-2}{x^2-3x+2} = \frac{2(3)-2}{3^2-3(3)+2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)}. \quad (2p)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) \sin(3x)} = \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{3x}{\sin(3x)} \frac{2}{3} \frac{1}{\cos(2x)} = 1(1)(\frac{2}{3})(1) = \frac{2}{3}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x}. \quad (4p)$$

$$\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x} = \frac{(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}} = \frac{x^2-2-(x^2+x)}{\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x^2})}+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}$$

$$= \frac{x^2-2-x^2-x}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{-x-2}{|x|(\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})} = \frac{x(-1-\frac{2}{x})}{|x|(\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}.$$

Eftersom x går mot $-\infty$ så är x negativt, och $|x| = -x$.

$$\text{Alltså, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-1-\frac{2}{x})}{-x(\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1-\frac{2}{x}}{-(\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}$$

$$= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

5. Lös följande ekvationerna (a) och (b) för $x \in \mathbb{R}$, och ekvationerna (c) och (d) för $z \in \mathbb{C}$.

$$(a) \lg(\ln(\lg x)) = 0 \quad (3p)$$

$$x > 0, \lg x > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ och } \ln(\lg(x)) > 0 \Rightarrow \lg(x) > 1 \Rightarrow x > 10$$

$$\lg(\ln(\lg x)) = 0 \Rightarrow \ln(\lg x) = 1 \Rightarrow \lg x = e \Rightarrow x = 10^e$$

$$(b) \sin(2x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6}) \quad (3p)$$

$$2x = 3x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ eller } 2x = \pi - (3x + \frac{\pi}{6}) + 2k\pi.$$

$$2x = 3x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow -x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2x = \pi - (3x + \frac{\pi}{6}) + 2k\pi = \pi - 3x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 5x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(c) 2z + (1-i)\bar{z} = 1 \quad (3p)$$

$$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}.$$

$$2x + 2iy + (1-i)(x-iy) = 2x + 2iy + x - ix - iy - y = 1$$

$$\Rightarrow (3x - y) + i(y - x) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - x = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$(d) z^4 = 1 + i. \quad (3p)$$

$$1 + i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^4 = r^4 e^{4i\theta} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \Rightarrow \begin{cases} r^4 = \sqrt{2} \\ 4\theta = \pi/4 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = (\sqrt{2})^{1/4} = 2^{1/8} \\ \theta = \pi/16 + k\pi/2 \end{cases}$$

för $k = 0, 1, 2, 3$.

Lösningar:

$$z_0 = 2^{1/8}e^{i\pi/16},$$

$$z_1 = 2^{1/8}e^{i(\pi/16+\pi/2)} = 2^{1/8}e^{i9\pi/16},$$

$$z_2 = 2^{1/8}e^{i(\pi/16+\pi)} = 2^{1/8}e^{i17\pi/16},$$

$$z_3 = 2^{1/8}e^{i(\pi/16+3\pi/2)} = 2^{1/8}e^{i25\pi/16}$$

6. (a) Formulera Eulers formler. (2p)

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ och } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- (b) Välj en av formlerna och bevisa det. (3p)

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{\cos \theta + i \sin \theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)}{2} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta}{2} = \frac{2 \cos \theta}{2} = \cos \theta \\ \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{\cos \theta + i \sin \theta - \cos(-\theta) - i \sin(-\theta)}{2i} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta}{2i} = \frac{2i \sin \theta}{2i} = \sin \theta \end{aligned}$$

- (c) Visa att $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$ med hjälp av:

- i. Euler's formel. (2p)

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2}{4} = \frac{2 \cos(x) + 2}{4} = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

- ii. dubbelvinkelsformel för cosinus. (2p)

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \Rightarrow \cos(2x) + 1 &= 2 \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2}. \end{aligned}$$

7. Bestäm de reella tal a och b så att funktionen (5p)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{då } x < 1 \\ ax + b & \text{då } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{då } x \geq 2 \end{cases}$$

är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$.

För $x < 1$ är f en rationell funktion så är den kontinuerlig. För $1 < x < 2$ är f en polynom så är den kontinuerlig, och f är konstant då $x > 2$ så är den kontinuerlig.

För att f blir kontinuerlig måste den vara kontinuerlig i punkterna $x = 1$ och $x = 2$.

Kontinuitet i $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

$$f(1) = a + b.$$

$$\Rightarrow a + b = 2.$$

Kontinuitet i $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} = 2a + b.$$

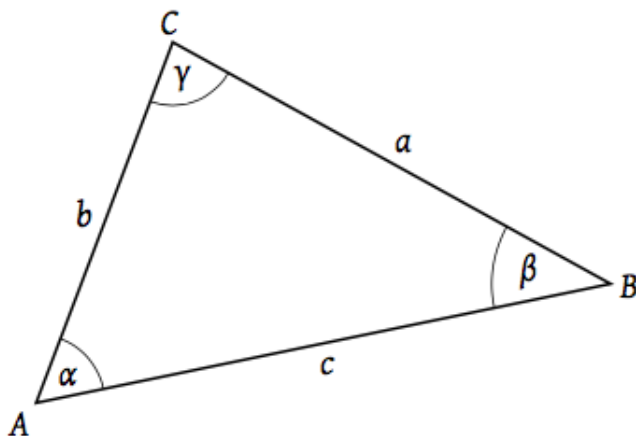
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1.$$

$$\Rightarrow 2a + b = 1 = f(2).$$

$$\text{Alltså } f(x) \text{ är kontinuerlig om och endast om } \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

8. Antag att $a = 4\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$ och vinkeln $\gamma = 60^\circ$ i triangeln i figuren nedan.



- (a) Beräkna längden c av sidan AB , (ge svaret på exakt form). (2p)

cosinussatsen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 16 + 25 - 2(4)(5)\frac{1}{2} = 41 - 20 = 21.$$

$$c = \sqrt{21}.$$

- (b) Beräkna vinklarna α och β . (2p)

Sinussatsen:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{21}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{2\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \alpha = 49^\circ \text{ eller } \alpha = 180^\circ - 49^\circ = 131^\circ.$$

Men om $\alpha = 131^\circ$ är $\beta = 180 - 60 - 131 < 0$. Omöjligt. Så är $\alpha = 49^\circ$.

$$\beta = 180^\circ - 60^\circ - 49^\circ = 71^\circ$$

Formelblad

Additions-och subtraktionsformlerna för de trigonometriska funktionerna

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

OBS: När det står flera $\pm$ och/eller $\mp$ i en formel så svarar de övre tecknena mot varandra och de undre tecknena mot varandra. (Man ska alltså inte kombinera övre tecknet på ena ledet med undre tecknet på andra ledet.)

Formler för dubbla vinkeln

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \cot \alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

Värdena på sinus och cosinus för några ovanliga vinklar

α	41°	49°	19°	71°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$	$\frac{2}{\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$	$\frac{5}{2\sqrt{7}}$
$\cos \alpha$	$\frac{2}{\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$	$\frac{5}{2\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$