

Matematik del A, Tekniskt basår

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd, linjal, pennvässare.

Max poäng på skriftlig del och Möbius: 28 respektive 24 poäng.

Betygsgränser (inklusive bonuspoäng): betyg 3: 20 p. betyg 4: 30 p. betyg 5: 40 p.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlistan.

Möbiusfrågor med inlämning via Inspira.

1. Låt $n \in \mathbb{N}$.

(a) Lös $8^{n/3} = 4^{1/2}$. (1p)

(b) Lös $\sqrt[3]{-n} = -3$. (1p)

(c) Lös $n^4 - 1 = 0$. (1p)

2. Lös följande uppgifter:

(a) Förenkla¹ (3p)

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2}$$

(b) Skriv $x = 0.916666\dots$ på enklaste bråkform. (2p)

3. Bestäm kvot- och restpolynom då $2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ delas med $2x^2 + x + 1$. (4p)

4. Låt $P(x) = (2x + 1)^4 - (2x - 1)^4$.

(a) Faktorisera polynomet $P(x)$ i reella faktorer. (3p)

(b) Lös ekvationen $P(x) = 80x$ (3p)

5. Låt vinkeln $v = \arcsin\left(\frac{5}{6}\right)$.

(a) Vad är $\cos(v)$ och $\tan(v)$? (3p)

(b) Vad är arean för rätvinklig triangel där ena vinkeln är v (ovan) och längden av hypotenusan är 12? (3p)

Digital del, antal poäng: 24

¹Här smög det sig in ett tryckfel i den utskrivna tentan, men det stod på korrekt sätt i Möbius.

Beräkningsdel - fullständiga lösningar krävs.

Skriv tentamenskoden tydligt på samtliga inlämnade papper.

Skriv tydligt och endast på ena sidan. Börja ny uppgift på ny sida och använd ej röd penna.

Till samtliga beräkningsuppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. Skriv tydligt och kortfattat, men var noga med att motivera dina svar väl. Endast svar ger inga poäng.

1. Avgör hur många lösningar ekvationssystemet har för olika värden på p . (3p)

$$\begin{cases} px + y = 1 \\ x + y = p \end{cases}$$

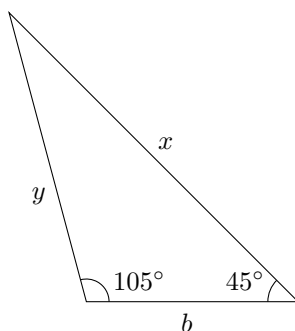
2. Lös ekvationen $|3x + 1| + |2x - 1| = 3$. (4p)

3. Bestäm avståndet från punkten $(2, 1)$ till räta linjen $2x + y = 4$ (4p)

4. Lös olikheten (5p)

$$\frac{1}{x+2} \leq \frac{x+3}{x^3+2x^2} - \frac{1}{x}$$

5. Betrakta triangeln i figuren nedan.



Höjden mot basen b i triangeln är $1 + \sqrt{3}$ l.e.

- (a) Bestäm triangelns area och omkrets. (5p)

$$\text{Hjälp: } \tan(75^\circ) = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

- (b) Om triangeln skalas om så att sidan x i figuren får precis längden 4 l.e., vad är då den nya arean? (2p)

6. Formulera och bevisa den så kallade pq -formeln, d.v.s. lösningsformeln för en andragradsekvation på standardform. (5p)

Totalpoäng: 52

Lycka till!!
Tommy och Carl-Joar

$$1. \quad (a) \quad 8^{n/3} = 4^{1/2}$$

$$(8^{1/3})^n = 2$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$2^n = 2$$

$$n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(b) \quad \sqrt[3]{-n} = -3$$

$$-n = (-3)^3 = 9 \cdot (-3) = -27$$

$$n = 27$$

(c)

$$n^4 - 1 = 0$$

$$n^4 = 1$$

$$n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

2. (a)

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2} = \frac{\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \cdot xy}{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2\right) \cdot xy} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$$

$$= \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$(b) \quad x = 0,91666...$$

$$100x = 91,66...$$

$$100x - x = 91,666... - 0,91666...$$

$$99x = 90,75$$

$$9900x = 9075$$

$$x = \frac{9075}{9900} = \frac{9075/3}{9900/3} = \frac{3025}{3300} = \frac{5 \cdot 605}{3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 11}$$

$$x = \frac{5 \cdot 5 \cdot 121}{3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11}{3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11} = \frac{11}{3 \cdot 2^2} = \frac{11}{12}$$

3.

$$\begin{array}{r} x^2 + x + \frac{1}{2} \\ 2x^2 + x + 1 \overline{) 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\ \underline{-(2x^4 + x^3 + x^2)} \\ 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\ \underline{-(2x^3 + x^2 + x)} \\ x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2})} \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Kvot: } x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Rest: } \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

4. Låt $P(x) = (2x + 1)^4 - (2x - 1)^4$.

(a) Faktorisera polynomet $P(x)$ i reella faktorer. (3p)

(b) Lös ekvationen $P(x) = 80x$ (3p)

(a) Använd Pascals triangel eller konjugatregeln. Med konjugatregeln, som används två gånger för att få ner exponenten från 4 till 2 och vidare från 2 till 1 i ena faktorn, blir det så här:

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x + 1)^4 - (2x - 1)^4 \\ &= ((2x + 1)^2 - (2x - 1)^2) ((2x + 1)^2 + (2x - 1)^2) \\ &= ((2x + 1) - (2x - 1))((2x + 1) + (2x - 1)) ((2x + 1)^2 + (2x - 1)^2) \end{aligned}$$

Vidare, genom att utveckla och förenkla,

$$\begin{aligned} P(x) &= ((2x + 1) - (2x - 1))((2x + 1) + (2x - 1)) ((2x + 1)^2 + (2x - 1)^2) \\ &= 2(4x) ((4x^2 + 4x + 1) + (4x^2 - 4x + 1)) \\ &= 2(4x) (8x^2 + 2) \\ &= 16x (4x^2 + 1) \end{aligned}$$

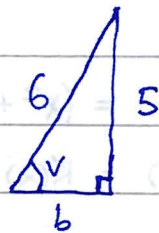
(b) Vi löser nu $P(x) = 80x$, där $P(x)$ är uttrycket i (a).

$$\begin{aligned} P(x) &= 80x \\ 16x (4x^2 + 1) &= 80x \\ 2x (4x^2 + 1) &= 10x \\ 2x (4x^2 + 1) - 10x &= 0 \\ x (8x^2 - 10 + 2) &= 0 \\ 8x (x^2 - 1) &= 0 \quad \implies \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1 \end{aligned}$$

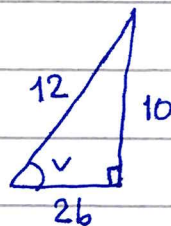
$$\text{Kvot: } x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Rest: } \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

5 $v = \arcsin \frac{5}{6}$ beskriver förhållandet



...eller, om vi bildar en likformig triangel i skala 2 ggr större,



Pythagoras sats: $6^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$

(a) $\cos v = \frac{b}{6} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ $\tan v = \frac{5}{b} = \frac{5}{\sqrt{11}}$

(b) $\text{area} = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 10 = 10b = 10\sqrt{11}$

← obs

$$1. \quad \begin{cases} px + y = 1 \\ x + y = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} px + y = 1 \\ px + py = p^2 \end{cases} \quad (p \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} px + y = 1 \\ (p-1)y = p^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} px + y = 1 \\ (p-1)y = (p-1)(p+1) \end{cases}$$

Fall: $p=1$

$$\dots \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \infty \text{ antal lös.}$$

Fall: $p=0$

$$\dots \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{unik lösning}$$

Fall: $p \neq 1, p \neq 0$

$$\dots \Leftrightarrow \begin{cases} px + y = 1 \\ y = p+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = p+1 \end{cases} \quad \text{unik lösning}$$

$$2. \quad |3x+1| + |2x-1| = 3$$

Kolla:

$$|3x+1| = \begin{cases} 3x+1 & \text{om } 3x+1 \geq 0 \\ -3x-1 & \text{om } 3x+1 < 0 \quad (x < -1/3) \end{cases}$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{om } 2x-1 \geq 0 \\ -2x+1 & \text{om } 2x-1 < 0 \quad (x < 1/2) \end{cases}$$

$$\underline{x < -1/3}$$

$$-3x-1-2x+1 = 3$$

$$-5x = 3$$

$$x = -3/5 \quad \text{ok.}$$

$$\underline{x \geq -1/3 \text{ \& } x < 1/2}$$

$$3x+1-2x+1 = 3$$

$$x+2 = 3$$

$$x = 1 \quad \text{inte ok.}$$

$$\underline{x \geq 1/2}$$

$$3x+1+2x-1 = 3$$

$$5x = 3$$

$$x = 3/5 \quad \text{ok}$$

$$\text{Svar: } x = \pm 3/5$$

3. Linjen l' är vinkelrät
mot linjen $l: 2x+y=4$.

$$l: y = -2x + 4 \quad (k\text{-värde } -2)$$

$$\Rightarrow l' \text{ har } k\text{-värde } \frac{1}{2}$$

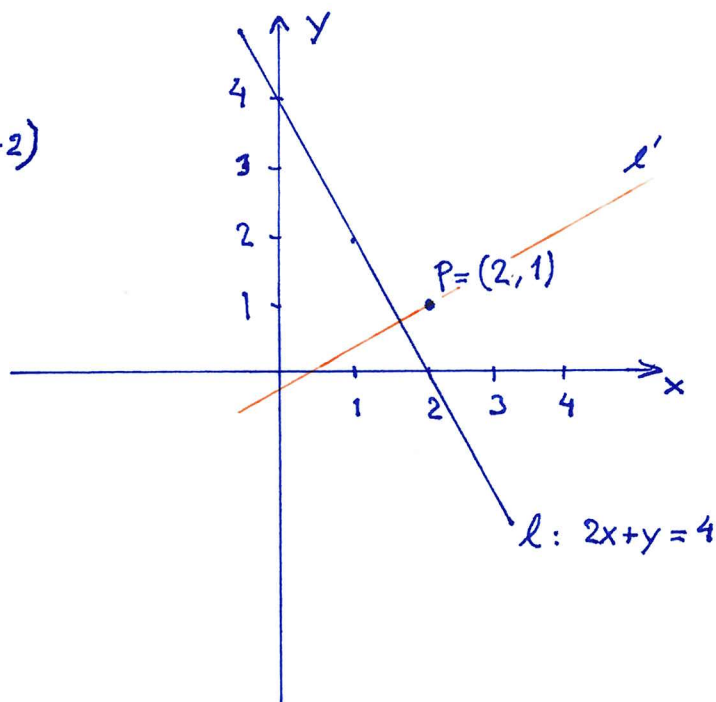
l' går genom $(2, 1)$
så

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$2y - x = 0$$



$$\text{Skärningspunkt: } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Avståndet:

$$|(2, 1) - (8/5, 4/5)| = \sqrt{(2 - \frac{8}{5})^2 + (1 - \frac{4}{5})^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{10}{5} - \frac{8}{5})^2 + (\frac{5}{5} - \frac{4}{5})^2} = \sqrt{(\frac{2}{5})^2 + (\frac{1}{5})^2} = \frac{1}{5} \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$= \frac{1}{5} \sqrt{4+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Svar: } \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

4.

$$\frac{1}{x+2} \leq \frac{x+3}{x^3+2x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \leq \frac{x+3}{x^3+2x^2}$$

$$\frac{x+2}{x(x+2)} + \frac{x}{x(x+2)} \leq \frac{x+3}{x^2(x+2)}$$

$$\frac{x(x+2)}{x^2(x+2)} + \frac{x^2}{x^2(x+2)} \leq \frac{x+3}{x^2(x+2)}$$

$$\frac{x(x+2)}{x^2(x+2)} + \frac{x^2}{x^2(x+2)} - \frac{x+3}{x^2(x+2)} \leq 0$$

$$\frac{x(x+2) + x^2 - (x+3)}{x^2(x+2)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + x^2 - x - 3}{x^2(x+2)} \leq 0$$

$$\frac{2x^2 + x - 3}{x^2(x+2)} \leq 0$$

$$\frac{(2x+3)(x-1)}{x^2(x+2)} \leq 0$$

Gör nu teckentabell.

		-2	-3/2	0	1				
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$2x+3$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
x^2	+	+	+	+	+	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$R(x)$	-	ejdef.	+	0	-	ejdef.	-	0	+

$$R(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x^2(x+2)}$$

$R(x) \leq 0$ gäller ifall

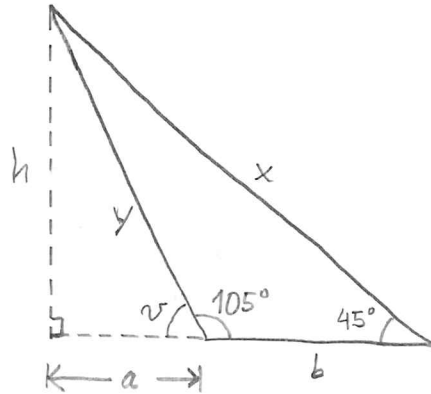
$$x < -2 \quad \text{eller} \quad -3/2 \leq x < 0, \quad 0 < x \leq 1$$

d.v.s på

$$\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee -3/2 \leq x < 0 \vee 0 < x \leq 1\}$$

$$= (-\infty, -2) \cup [-3/2, 0) \cup (0, 1].$$

5.



$$h = 1 + \sqrt{3}$$

$$v = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

$$\tan 75^\circ = \frac{h}{a} = \frac{1+\sqrt{3}}{a} \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{3}}{\tan 75^\circ}$$

$$a = \frac{1+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}} = \sqrt{3}-1$$

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{a+b} \Rightarrow b = \frac{h}{\tan 45^\circ} - a = h - a$$

$$b = 1 + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = 2$$

Pythagoras:

$$x^2 = h^2 + (a+b)^2$$

$$y^2 = h^2 + a^2$$

$$x^2 = (1+\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2 = 2(1+\sqrt{3})^2$$

$\Downarrow$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2} (1+\sqrt{3})$$

$$y = \sqrt{8}$$

$$\text{Omkrets: } x+y+b = \sqrt{2} (1+\sqrt{3}) + \sqrt{8} + 2 = \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 2$$

$$\text{Area: } \frac{bh}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

(b) Om x skalas om så att sidan blir 4
skalas arean om med faktorn

$$\left(\frac{4}{x}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}\right)^2 = \frac{16}{2(1+\sqrt{3})^2}.$$

Den nya arean blir

$$(1+\sqrt{3}) \cdot \frac{8}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{8}{1+\sqrt{3}}$$