

Matematik del A, Tekniskt basår

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd, linjal, pennvässare.

Max poäng på skriftlig del och Möbius: 28 respektive 24 poäng.

Betygsgränser (inklusive bonuspoäng): betyg 3: 22 p. betyg 4: 32 p. betyg 5: 42 p.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlistan.

Möbiusfrågor med inlämning via Inspera.

1. Skriv på enklast möjliga bråkform:

(3p)

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 (\sqrt[4]{6a})^{-2}}{(\sqrt[6]{6a})^3 (\sqrt{3a})^{-3}}$$

Eftersom det står $\sqrt{3a}$ i nämnaren av uttrycket och eftersom vi tar n :te roten ur $6a$ för jämna n måste $a > 0$. Vi börjar med att förenkla bråken med negativa exponenter:

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 (\sqrt[4]{6a})^{-2}}{(\sqrt[6]{6a})^3 (\sqrt{3a})^{-3}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{1}{(\sqrt[4]{6a})^2}}{(\sqrt[6]{6a})^3 \frac{1}{(\sqrt{3a})^3}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 (\sqrt{3a})^3}{(\sqrt[6]{6a})^3 (\sqrt[4]{6a})^2}$$

Nu använder vi reglerna för rationella exponenter:

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 (\sqrt{3a})^3}{(\sqrt[6]{6a})^3 (\sqrt[4]{6a})^2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 (\sqrt{3a})^3}{(6a)^{3/6} (6a)^{2/4}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 (\sqrt{3a})^3}{(6a)^{1/2} (6a)^{1/2}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 (\sqrt{3a})^3}{6a}$$

Reglerna för roten ur ger nu

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 (\sqrt{3a})^3}{6a} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 (\sqrt{3}\sqrt{a})^3}{6a} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 (\sqrt{3})^3 (\sqrt{a})^3}{6a} = \frac{(\sqrt{a})^3}{6a} = \frac{\sqrt{a}}{6}.$$

2. Lös olikheten

(4p)

$$2x + 1 \geq \frac{3}{x}$$

Skriv om olikheten enligt

$$2x + 1 \geq \frac{3}{x} \iff 2x + 1 - \frac{3}{x} \geq 0$$

och förläng $2x + 1$ med minsta gemensamma nämnare:

$$2x + 1 - \frac{3}{x} \geq 0 \iff \frac{(2x + 1)x}{x} - \frac{3}{x} \geq 0 \iff \frac{2x^2 + x - 3}{x} \geq 0.$$

Faktorisera polynomet i täljaren med valfri metod:

$$\frac{2x^2 + x - 3}{x} = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x} = R(x).$$

Vi kallar det rationella uttrycket $R(x)$. Skriv en teckentabell:

$x =$	$-3/2$			0		1	
$2x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	-	-	0	+
$R(x)$	-	0	+	ej def	-	0	+

Nu är det rättfram att skriva ner

$$R(x) \geq 0 \text{ för } x \in [-3/2, 0) \cup [1, \infty).$$

3. Lös rotekvationen

$$\sqrt{4x + 100} = -x - 20$$

(4p)

Kvadrering ger

$$\sqrt{4x + 100} = -x - 20 \implies 4x + 100 = (-x - 20)^2 = (x + 20)^2 = x^2 + 40x + 400.$$

Vidare är

$$4x + 100 = x^2 + 40x + 400 \iff x^2 + 36x + 300 = 0.$$

Vi löser detta med valfri metod.

$$x_{\pm} = -18 \pm \sqrt{18^2 - 300} = -18 \pm \sqrt{24} = -18 \pm 2\sqrt{6}.$$

Vi måste testa lösningarna. Börjar med $x_- = -18 - \sqrt{24}$. Insättning i originalekvationen ger

$$\text{VL} = \sqrt{4x + 100} = \sqrt{4(-18 - 2\sqrt{6}) + 100} = \sqrt{-72 - 8\sqrt{6} + 100}.$$

Notera att $-72 - 8\sqrt{6} > -72 - 8\sqrt{9} = -96$, så då är $-72 - 8\sqrt{6} + 100 > 0$.

$$\text{HL} = -x - 20 = -(-18 - 2\sqrt{6}) - 20 = 18 + 2\sqrt{6} - 20.$$

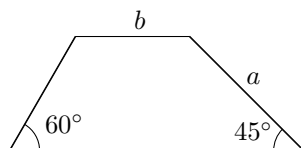
Men $18 + 2\sqrt{6} > 18 + 2\sqrt{4} = 22$, så $18 + 2\sqrt{6} - 20 > 0$. Alltså är x_- en lösning. Testar x_+ på samma sätt, och inser att

$$\text{HL} = -x - 20 = -(-18 + 2\sqrt{6}) - 20 = 18 - 2\sqrt{6} - 20 < 0,$$

vilket inte kan vara en lösning.

Vi sammanfattar med att enda roten är $x = -18 - 2\sqrt{6}$ och att $x = -18 + 2\sqrt{6}$ är en falsk rot.

4. Betrakta följande parallelltrapets, där $a = 3$ dm och $b = 2$ dm.



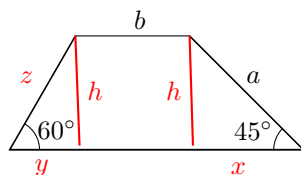
(a) Bestäm höjden. (2p)

(b) Bestäm trapetsens omkrets. (2p)

(c) Bestäm arean av parallelltrapetsen. (2p)

(d) Om parallelltrapetsen utgör basen i en pyramid med sin spets 1 dm vinkelrätt ovanför basen, vad blir pyramidens volym? (1p)

Vi börjar med att bestämma höjden (h).



Vi får direkt att $h/a = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ och därmed att $h = 3/\sqrt{2}$.

För att beräkna omkretsen behöver vi bestämma x, y och z i figuren ovan.

Då är,

$$x/a = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} \quad \text{vilket ger att} \quad x = 3/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}/2$$

$$y/h = \cot 60^\circ = 1/\sqrt{3} \quad \text{vilket ger att} \quad y = h/\sqrt{3} = \sqrt{3}/\sqrt{2} = \sqrt{6}/2$$

$$h/z = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 \quad \text{vilket ger att} \quad z = h \cdot 2/\sqrt{3} = \sqrt{6}$$

Totalt finner vi att omkretsen är ($a + 2b + x + y + z$):

$$3 + 4 + 3\sqrt{2}/2 + \sqrt{6}/2 + \sqrt{6} = 7 + \frac{3}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Arean ges av formeln

$$\frac{(\text{toppsidan}) + (\text{basen})}{2} \cdot (\text{höjden}) = \frac{1}{2} \cdot (2 + 2 + 3\sqrt{2}/2 + \sqrt{6}/2) \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + 9/4 + 3\sqrt{3}/4$$

Om parallelltrapetsen utgör basen i en pyramid med sin spets 1 dm vinkelrätt ovanför basen, så är volymen $V = Bh/3$, där B är basens area och h är höjden. Alltså är volymen

$$\frac{3\sqrt{2} + 9/4 + 3\sqrt{3}/4}{3} \text{ dm}^3 = \sqrt{2} + 3/4 + \sqrt{3}/4 \text{ dm}^3.$$

5. (a) Bestäm samtliga rötter till ekvationen (3p)

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 0$$

- (b) Ange minsta gemensamma nämnare för uttrycket (1p)

$$R(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{6x - 2}{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4}$$

- (c) Skriv uttrycket i (b) som ett bråk, på så enkel bråkform som möjligt. (2p)

(a) Vi gissar heltalsrötter till ekvationen. Eftersom den konstanta termen är 4 ska vi undersöka om 1, -1, 2, -2, 4 eller -4 är rötter. Låt $x = 1$ och testa:

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 2 - 7 + 4 + 4 = 3 \neq 0.$$

Okej, det var inte en rot. Testa nu $x = 2$:

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 16 - 28 + 8 + 4 = 0.$$

Så bra. Det är en rot. Då vet vi att

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = (x - 2)K(x)$$

där K är ett polynom, enligt faktorsatsen för polynom. Vi hittar K genom polynomdivision:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x - 2 \\ x - 2 \overline{) 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4} \\ \underline{- 2x^3 + 4x^2} \\ - 3x^2 + 4x \\ \underline{3x^2 - 6x} \\ - 2x + 4 \\ \underline{2x - 4} \\ 0 \end{array}$$

Alltså, $K(x) = 2x^2 - 3x - 2$. Men i så fall har även detta polynom ett nollställe i $x = 2$, för

$$x = 2 \implies 2x^2 - 3x - 2 = 8 - 6 - 2 = 0.$$

Detta innebär att $2x^2 - 3x - 2$ är delbart med $x - 2$. Vi hittar kvotpolynomet med polynomdivision:

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ x-2 \overline{) 2x^2-3x-2} \\ \underline{-2x^2+4x} \\ x-2 \\ \underline{-x+2} \\ 0 \end{array}$$

Alltså, $2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$. Då är

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = (x - 2)^2(2x + 1).$$

Vi använder "nollproduktsmetoden":

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = (x - 2)^2(2x + 1) = 0 \implies x = -1/2 \text{ eller } x = 2.$$

Roten $x = 2$ är en dubbelrot.

(b) Eftersom $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ är den minsta gemensamma nämnaren $(x - 2)^2(2x + 1)$.

(c) Vi förlänger till minsta gemensamma nämnare och förenklar:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{6x - 2}{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4} &= \frac{x}{(x - 2)^2} - \frac{6x - 2}{(2x + 1)(x - 2)^2} \\ &= \frac{x(2x + 1)}{(2x + 1)(x - 2)^2} - \frac{6x - 2}{(2x + 1)(x - 2)^2} = \frac{2x^2 + x - 6x + 2}{(2x + 1)(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{(2x + 1)(x - 2)^2} \end{aligned}$$

Nu kan ju täljaren och nämnaren ha gemensamma faktorer. Vi faktorerar därför $2x^2 - 5x + 2$ med valfri metod (t.ex., kvadratkomplettering alternativt pq-formeln) och då upptäcker vi att

$$2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x - 2)$$

Då kan en faktor $x - 2$ förkortas:

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{(2x + 1)(x - 2)^2} = \frac{2x - 1}{(2x + 1)(x - 2)}.$$

Vi svarar:

$$R(x) = \frac{2x - 1}{(2x + 1)(x - 2)}.$$

Beräkningsdel - fullständiga lösningar krävs.

Skriv tentamenskoden tydligt på samtliga inlämnade papper.

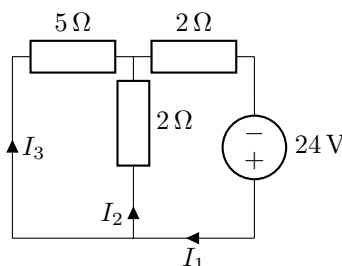
Skriv tydligt och endast på ena sidan. Börja ny uppgift på ny sida och använd ej röd penna.

Till samtliga beräkningsuppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. Skriv tydligt och kortfattat, men var noga med att motivera dina svar väl. Endast svar ger inga poäng.

1. Den elektriska kretsen i figuren beskrivs av följande system av linjära ekvationer:

(4p)

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 2I_1 + 5I_3 = 24 \\ 2I_2 = 5I_3 \end{cases}$$



Skriv ekvationssystemet på standardform (variabler i vänsterled och konstanta termer i högerled) och lös sedan ekvationssystemet med eliminationsmetoden.

- (a) Vi skriver systemet på standardform:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2I_1 + 5I_3 = 24 \\ 2I_2 - 5I_3 = 0 \end{cases}$$

Förenklar med radvisa operationer:

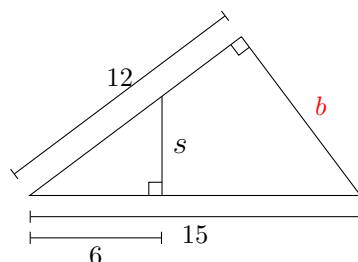
$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2I_2 + 7I_3 = 24 \\ 2I_2 - 5I_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2I_2 + 7I_3 = 24 \\ 12I_3 = 24 \end{cases} \iff \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2I_2 + 7I_3 = 24 \\ I_3 = 2 \end{cases}$$

..och

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2I_2 + 7I_3 = 24 \\ I_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2I_2 + = 10 \\ I_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} I_1 = 7 \\ I_2 = 5 \\ I_3 = 2 \end{cases}$$

2. Beräkna längden s i nedanstående triangel.

(4p)



Eftersom vinkeln mellan sidorna med längd 12 och 15 är samma för både den mindre och den större triangeln, samt eftersom en annan vinkel är rät, är den mindre och den större triangeln likformiga. Sidorna har därför förhållanden:

$$\frac{b}{12} = \frac{s}{6},$$

där b är sidlängden till höger om den räta vinkeln i den stora triangeln. Att ena kateten i den lilla triangeln har längd 6 framgår i figuren. Pythagoras sats: $12^2 + b^2 = 15^2$. Alltså är $b = 9$. Då ges

$$s = 6 \cdot \frac{b}{12} = 6 \cdot \frac{9}{12} = \frac{9}{2}.$$

3. (a) Vilket kägelsnitt beskriver ekvationen nedan? Rita en figur. (3p)

$$4x^2 - 16x + y^2 - 2y = -16$$

- (b) Bestäm skärningspunkterna mellan kägelsnittet i a) med den räta linjen: (3p)

$$y = 2x - 4$$

- (c) Formeln för en hyperbel med medelpunkt i origo kan skrivas (2p)

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

Förklara varför hyperbeln inte skär y -axeln. Vad är minsta avståndet mellan hyperbeln och y -axeln?

- (a) Kvadratkomplettera:

$$4x^2 - 16x + y^2 - 2y = -16 \iff 4x^2 - 16x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$\iff (2x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 1 \iff \frac{(x - 2)^2}{(1/2)^2} + (y - 1)^2 = 1$$

Detta är en ellips med halvaxlar $1/2$ och 1 och medelpunkt i $(x, y) = (2, 1)$.

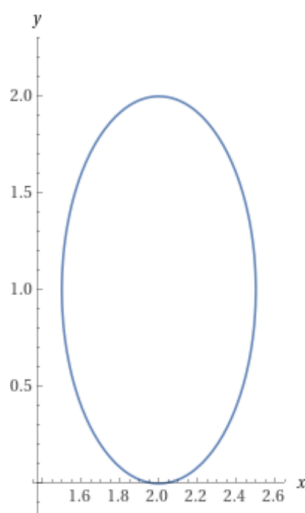


Figure 1: En ellips med halvaxlar $1/2$ och 1 och medelpunkt i $(x, y) = (2, 1)$.

- (b) I uträkningen ovan finner vi att

$$4x^2 - 16x + y^2 - 2y = -16 \iff (2x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Kombinera detta med att $y = 2x - 4$, och erhåll

$$y^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Alltså är $2y^2 - 2y + 1 = 1$ eller ekvivalent $2y^2 - 2y = 2y(y - 1) = 0$, så vi får lösningarna $y = 0$ och $y = 1$. Sätter vi in dessa värden i någon av ekvationerna ovan, förslagsvis $y = 2x - 4$, så ser vi att motsvarande värden på x är

$$0 = 2x - 4 \iff x = 2$$

$$1 = 2x - 4 \iff x = 5/2.$$

Skärningspunkterna är alltså $(x, y) = (2, 0)$ och $(x, y) = (5/2, 1)$.

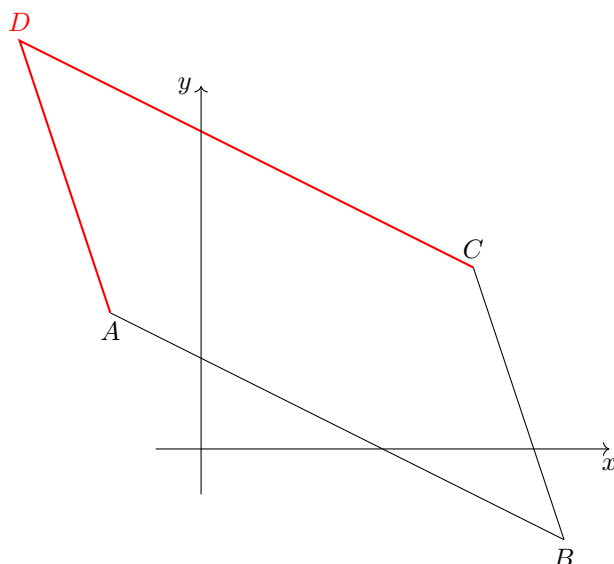
- (c) Om hyperbeln hade skurit y -axeln hade $x = 0$ gått att sätta in i ekvationen, men $x = 0$ medför $-y^2/b^2 = 1$, vilket saknar reella lösningar. Punkten på hyperbeln som är närmast y -axeln har $y = 0$, och då är $x^2/a^2 = 1$, så $x = \pm a$. Det minsta avståndet till y -axeln är lika med a .

4. Låt $A = (-2, 3)$, $B = (8, -2)$, $C = (6, 4)$ utgöra 3 av hörnen i en parallelogram med sidorna AB , BC , CD och DA .

(a) Bestäm koordinaterna för det fjärde hörnet D . (3p)

(b) Bestäm parallelogrammens area. (4p)

(a) Eftersom figuren är en parallelogram måste sidorna AB och BC ha parallella, motstående sidor. Dessa är CD och DA , vilket avgör var D finns. Vi kan rita upp punkterna i ett koordinatsystem och få lite hjälp.



Hörnet D måste befinna sig "lite nord-väst" om A på samma sätt som C ligger lite "nord-väst" om B , så att linjerna blir parallella. D.v.s. lutningen på DA och BC måste vara lika, så deras Δy och Δx ska vara lika:

$$\frac{\Delta y_{BC}}{\Delta x_{BC}} = \frac{4 - (-2)}{6 - 8} = \frac{6}{-2}$$

Alltså, D ligger 6 enheter upp (y -led) från A och 2 enheter åt vänster (x -led) från A . Koordinaterna måste vara

$$D = (-4, 9).$$

(b) För att bestämma arean av parallelltrapetsen ska vi använda formeln

$$A = (\text{bas}) \times (\text{höjd}).$$

Vi kan betrakta AB som baslinjen (men det går lika bra att använda BC , CD eller DA). Då är basen i formeln för arean längden av AB och höjden är (det vinkelräta) avståndet från AB till CD . För att bestämma längden av AB använder vi avståndsformeln:

$$|AB| = \sqrt{(-2 - 8)^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

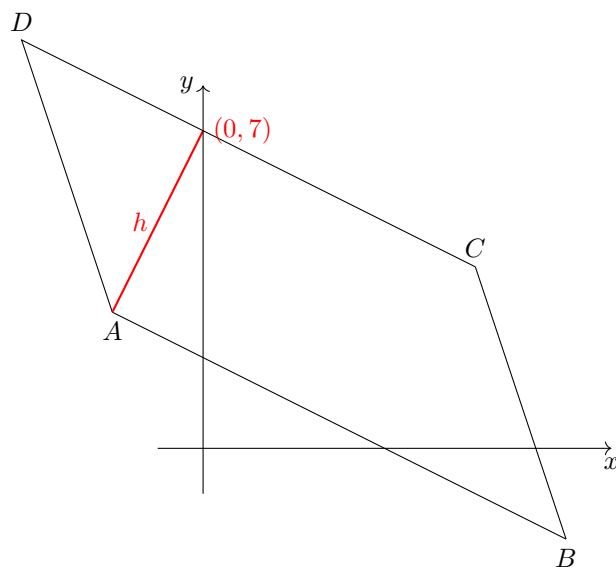
Linjen AB har ekvationen $y = -\frac{1}{2}x + 2$, d.v.s. dess lutningskoefficient är $-1/2$. För att mäta avståndet från AB till CD behöver vi en rät linje som är vinkelrät mot AB . Dess lutningskoefficient ska således vara 2, så dess ekvation blir $y = 2x + m$ för något m . Konstanten m kan väljas lite godtyckligt, men vi kan bestämma m så att linjen går genom punkten A . I så fall måste

$$3 = 2 \cdot (-2) + m,$$

vilket innebär att $m = 7$. Linjen med ekvationen $y = 2x + 7$ går alltså genom A , och den skär linjen CD i punkten (x, y) som uppfyller denna ekvation och ekvationen för CD samtidigt. Alltså ska vi lösa

$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -\frac{1}{2}x + 7 \end{cases}$$

Här har vi räknat ut att CD beskrivs av $y = -\frac{1}{2}x + 7$. Lösningen är $(x, y) = (0, 7)$. Vi kan rita detta i figuren:



Höjden är avståndet mellan $(-2, 3)$ och $(0, 7)$, d.v.s.

$$h = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Arean av parallelltrapetsen är alltså

$$A = 5\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 50.$$

5. Formulera och bevisa faktorsatsen för polynom.

(5p)

Lösningsförslag: Se kurshemsidan eller föreläsninganteckningar.

Lycka till!!
Tommy och Carl-Joar