Tekniskt Basår, Matematik del A, 2024-01-03
Lösningar

1a)

$$\frac{6^{-12}\ 42^{33}\ 16}{21^{20}\cdot 28^{12}} = \frac{(2\ 3\cdot 7)^{33}\cdot 2^4}{(2\cdot 3)^{12}\cdot (3\cdot 7)^{20}\cdot (2^2\cdot 7)^{12}}$$

$$= \frac{2^{33}\cdot 3^{33}\cdot 7^{33}\ \ 2^4}{2^{12}\cdot 3^{12}\cdot 3^{20}\cdot 7^{20}\cdot 2^{24}\cdot 7^{12}}$$

$$= 2^{33+4-12-24}\cdot 3^{33-12-20}\cdot 7^{33-20-12}$$

$$= 2^1\cdot 3^1\cdot 7^1 = 2\cdot 3\cdot 7 = 42$$

Svar: 42

b)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Termen blir $10(2x)^3(3y)^2 = 10\cdot 2^3\cdot x^3 3^2\ y^2$

$$= 10\cdot 8\cdot 9\ x^3y^2 = 720\ x^3y^2$$

Svar: 720

c) $x - \sqrt{4x+8} = 1 \iff x - 1 = \sqrt{4x+8}$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 4x+8 \iff x^2 - 2x + 1 = 4x + 8$

$\iff x^2 - 6x - 7 = 0 \iff (x-7)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 7$ eller $x = -1$

Kontroll: $x = 7$: $VL = 7 - \sqrt{4\cdot 7 + 8} = 7 - \sqrt{36} =$

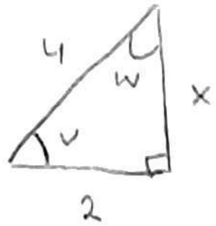
$= 7 - 6 = 1 = HL$ OK

$x = -1$: $VL = -1 - \sqrt{4\cdot(-1)+8} = -1 - \sqrt{4} = -1 - 2 = -3$

$HL = 1$ $VL \neq HL$ falsk rot.

Svar: $x = 7$

2.



Pythagoras: $2^2 + x^2 = 4^2$

$\underset{x>0}{\Longleftrightarrow} \quad x = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\cos v = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v = 60°$

Så $w = 180° - 90° - 60° = 30°$

Area: $\frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Svar: Vinklar: $90°, 60°, 30°$

Area: $2\sqrt{3}$ areaenheter.

3. $\begin{cases} x + 2y = -1 & (2) \; (-5) \\ -2x + 2y + 7z = 10 \\ 5x + 13y + 3z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 6y + 7z = 8 \\ 3y + 3z = 3 & (\frac{1}{3}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 6y + 7z = 8 \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = 1 & (-6) \\ 6y + 7z = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = 1 \\ z = 2 & (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ y = -1 & (-2) \\ z = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$

Svar: $x = 1$
$y = -1$
$z = 2$

Kontroll: $1 + 2 \cdot (-1) = -1$ OK
$-2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 = 10$ OK
$5 \cdot 1 + 13 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = -2$ OK

4. Möjliga heltalsrötter: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
(måste dela $a_0 = 4$)

$$f(1) = 1^4 + 2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow x-1 \text{ är en faktor}$$

$$f(-2) = (-2)^4 + 2\cdot(-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 - 4(-2) + 4$$
$$= 16 - 16 - 12 + 8 + 4 = 0 \Rightarrow x+2 \text{ är en faktor}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 \text{ är en faktor}$$

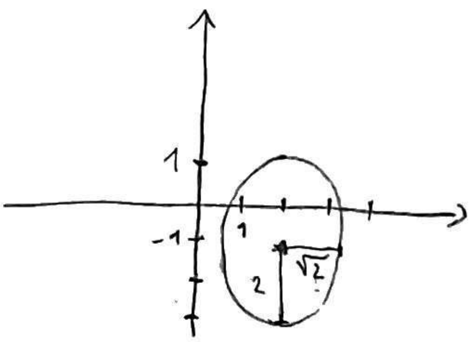
Polynomdivision:

$$\begin{array}{rl}
x^2 + x - 2 & \\
\hline
x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 & \big| \; x^2 + x - 2 \\
-(x^4 + x^3 - 2x^2) & \\
\hline
x^3 - x^2 - 4x + 4 & \\
-(x^3 + x^2 - 2x) & \\
\hline
-2x^2 - 2x + 4 & \\
-(-2x^2 - 2x + 4) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Så
$$f(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 2)$$
$$= (x-1)(x+2)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)^2$$

Svar. $f(x) = (x-1)^2(x+2)^2$

5 a)
$$\frac{(x-2)^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$



Svar: $\dfrac{(x-2)^2}{2} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$

5)

$$y=0 \implies \frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(0+1)^2}{4}=1$$

$$\iff \frac{(x-2)^2}{2}+\frac{1}{4}=1 \iff \frac{(x-2)^2}{2}=\frac{3}{4}$$

$$\iff (x-2)^2=\frac{3}{2} \iff x-2=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\iff x=2\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Svar: $x=2+\sqrt{\frac{3}{2}}$ och $x=2-\sqrt{\frac{3}{2}}$

6

$\sqrt{\frac{16}{x^7}-\frac{1}{x^3}}$ är definierat om $\frac{16}{x^7}-\frac{1}{x^3}\geq 0$

$$\iff \frac{16}{x^7}-\frac{x^4}{x^7}\geq 0 \iff \frac{16-x^4}{x^7}\geq 0$$

$$\iff \frac{(4-x^2)(4+x^2)}{x^7}\geq 0 \iff \frac{(2-x)(2+x)\overbrace{(4+x^2)}^{\geq 0}}{x^7}\geq 0$$

$$\iff \frac{(2-x)(2+x)}{x^7}\geq 0 \iff \frac{(x-2)(x+2)}{x^7}\leq 0$$

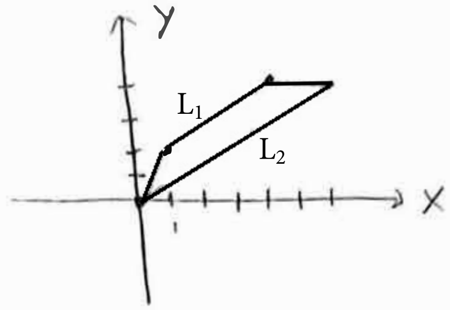
Brytpunkter: $x=2$ $x=-2$, $x=0$

Teckenschema:

		-2		0		2	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^7	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-2)(x+2)}{x^7}$	$-$	0	$+$	ej def	$-$	0	$+$

Svar: $x\in(-\infty,-2]\cup(0,2]$

7 a)



För ett parallelltrapets ska två motstående sidor vara parallella

Linje 1 mellan $(1,2)$ och $(4,4)$: $k_1 = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$

Linje 2 mellan $(0,0)$ och $(6,4)$: $k_2 = \frac{4-0}{6-0} = \frac{2}{3}$

$k_1 = k_2$. Alltså är linjerna parallella. V.S.V

b) Avstånd från $(1,2)$ till linje 2:

Linje 2: Enpunktsform: $(y-0) = \frac{2}{3}(x-0)$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x$

Linje genom $(1,2)$ vinkelrät mot linje 2:

$\frac{2}{3} \cdot k_3 = -1 \Leftrightarrow k_3 = -\frac{3}{2}$ pga vinkelrätt

Enpunktsform: $y - 2 = -\frac{3}{2}(x-1)$

$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

Skärningspunkt: $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \\ y = \frac{2}{3}x \end{cases}$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}x = \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{6}x + \frac{4}{6}x = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{13x}{6} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 13x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{21}{13}$

Sätt in värdet: $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{21}{13} = \frac{14}{13}$

Avstånd mellan $(1,2)$ och $\left(\frac{21}{13}, \frac{14}{13}\right)$:

$\sqrt{\left(\frac{21}{13} - 1\right)^2 + \left(\frac{14}{13} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+144}{13^2}} = \frac{\sqrt{208}}{13}$

$= \frac{\sqrt{2^4 \cdot 13}}{13} = 4\sqrt{13}/13$ Svar: $4/\sqrt{13}$ l.e.

c) Avstånd från (1,2) till (4,4):

$$\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$

Avstånd från (0,0) till (6,4):

$$\sqrt{(6-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$= \sqrt{4\cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

Area: $$\frac{(a+b)\cdot h}{2} = \frac{(2\sqrt{13}+\sqrt{13})\cdot 4/\sqrt{13}}{2} = \frac{3\cdot 4}{2}$$

$$= 6$$

Svar: 6 a.e

8 En andragradsekvation $x^2+px+q=0$ har rötterna $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ givet att $p^2 \geq 4q$

Bevis: Kvadratkomplettering ger

$$x^2+px+q = x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$$

Så $x^2+px+q=0 \iff \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0$

$$\iff \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2-q \iff x+\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$\iff x = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Detta gäller om $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \geq 0$

$$\iff \frac{p^2}{4} \geq q \iff p^2 \geq 4q.$$