

Lösningar tentamen 29/10 - 22

1. Antag att vi vill visa att ett påstående P medför ett annat påstående Q , dvs $P \Rightarrow Q$.

(i) Om vi utför ett direkt bevis så visar vi att

$$P \Rightarrow U_1 \Rightarrow U_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow Q$$

dvs vi börjar i P och slutar i Q

(ii) Om vi utför ett indirekt bevis så visar vi att

$$\neg Q \Rightarrow U_1 \Rightarrow U_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \neg P$$

dvs vi börjar i inte Q , och slutar i inte P .

(iii) Om vi utför ett motsägelsebevis så visar vi att

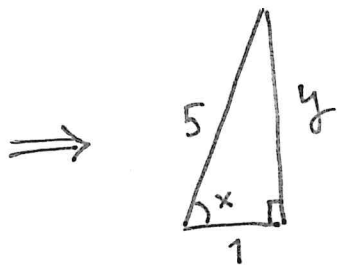
$$\neg Q \Rightarrow U_1 \Rightarrow U_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow U$$

där vi vet att utsagan U är falsk (t.ex. $0=7$),

dvs vi börjar i inte Q , och slutar i en motsägelse.

$$\begin{aligned}
 2(a) \quad \frac{\frac{a^2}{a+b} + b - a}{1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}} &= \frac{\frac{a^2 + (b-a)(b+a)}{b+a}}{\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2}} = \\
 &= \frac{\frac{a^2 + b^2 - a^2}{a+b}}{\frac{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{(a+b)^2}} = \frac{b^2}{a+b} \bigg/ \frac{4ab}{(a+b)^2} = \\
 &= \frac{b^2}{a+b} \cdot \frac{(a+b)^2}{4ab} = \frac{b(a+b)}{4a}
 \end{aligned}$$

(b) $x = \arccos\left(\frac{1}{5}\right)$ ← x är den vinkel för vilken förhållandet mellan närliggande katet och hypotenusan i en rätvinklig triangel är $1/5$



$$\begin{aligned}
 \text{Pyth. sats: } 1^2 + y^2 &= 5^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow y^2 &= 24 \xrightarrow{y \geq 0} y = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \tan(x) = 2\sqrt{6}, \quad \sin(x) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(c) Låt $P(x) = x^4 + x^3 + 5kx^2 + 3kx + m$.

$P(x)$ jämnt delbart med $x+2$ och $x-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{ \text{Faktorsatsens omvändning} \} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2$ och $x = 1$ nollställen till $P(x)$.

$$P(-2) = 16 - 8 + 20k - 6k + m = 8 + 14k + m$$

$$P(1) = 1 + 1 + 5k + 3k + m = 2 + 8k + m$$

$$\text{Vi får elev. systemet: } \begin{cases} 8 + 14k + m = 0 \\ 2 + 8k + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 14k = -m \\ 2 + 8k = -m \end{cases} \Rightarrow 8 + 14k = 2 + 8k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6k = -6 \Leftrightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow -m = 2 + 8k = 2 + 8(-1) = -6 \Leftrightarrow m = 6$$

$$\therefore k = -1 \text{ och } m = 6 \text{ så}$$

$$P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$$

3 (a) Definition: En linjär ekvation är en ekvation av formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

där $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ (konstanter).

(b) Låt $x = \text{Xenias} \text{ \AA}lder$, $y = \text{Ylvas} \text{ \AA}lder$ och $z = \text{Zannas} \text{ \AA}lder$.

Har att: (i) $x + y + z = 18$

(ii) $y + z = x$

(iii) $2y = z$

Vi får det linjära ekv.systemet:

$$\begin{cases} x + y + z = 18 & \boxed{1} \\ -x + y + z = 0 & \leftarrow \boxed{1} \\ 2y - z = 0 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ 2y + 2z = 18 & \boxed{-1} \\ 2y - z = 0 & \leftarrow \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ 2y + 2z = 18 & \boxed{\frac{1}{2}} \\ -3z = -18 & \boxed{-\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 & \leftarrow \\ y + z = 9 & \leftarrow \\ z = 6 & \boxed{-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

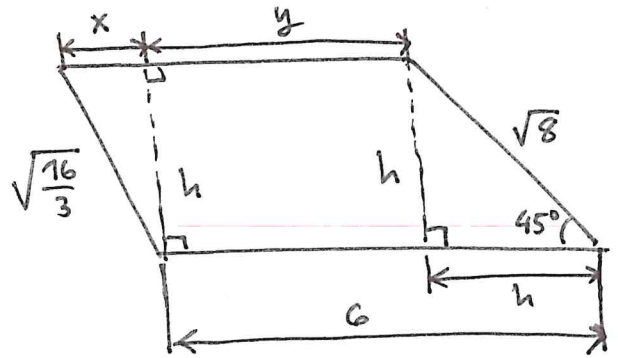
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 & \leftarrow \\ y = 3 & \boxed{-1} \\ z = 6 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \\ z = 6 \end{cases}$$

$\therefore$ Xenia är 9 år, Ylva 3 år och Zanna 6 år

$$4. \sin(45^\circ) = \frac{h}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{8} \sin(45^\circ) = \sqrt{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{2}} \quad (*)$$

$$y = 6 - h \stackrel{(*)}{=} 6 - 2 = 4$$



$$\text{Pyth. sats: } x^2 + h^2 = \left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{3} - h^2 \stackrel{(*)}{=} \frac{16}{3} - 4 = \frac{16-12}{3} = \frac{4}{3} \stackrel{x \geq 0}{\Rightarrow} x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{Omkrets: } 6 + \sqrt{\frac{16}{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + 4 + \sqrt{8} =$$

$$= 10 + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} = 10 + \frac{6}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} =$$

$$= \underline{\underline{10 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \text{ l.e.}}}$$

$$5(a) \quad \frac{x^2}{x^2+7x+6} \geq \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+7x+6} - \frac{1}{x+1} \geq 0$$

$$\left\{ x^2+7x+6=0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}-6} = -\frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = -6 \end{matrix} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x+1)(x+6)} - \frac{1}{x+1} \cdot \frac{(x+6)}{(x+6)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-(x+6)}{(x+1)(x+6)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{(x+1)(x+6)} \geq 0$$

$$\left\{ x^2-x-6=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{matrix} \right\}$$

$$\Leftrightarrow R(x) = \frac{\overset{3}{\underset{-1}{x-3}} \overset{-2}{\underset{-6}{x+2}}}{\underset{-1}{x+1} \underset{-6}{x+6}} \geq 0$$

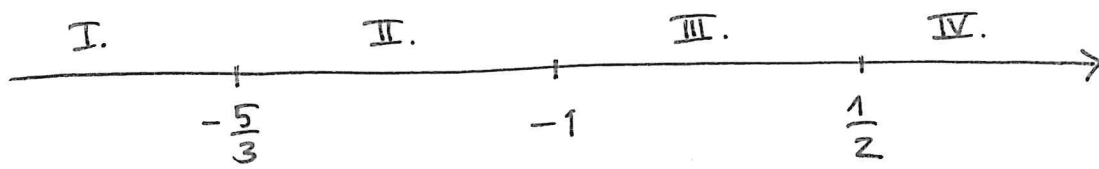
		-6		-2		-1		3	
x+6	-	0	+		+		+		+
x+2	-		-	0	+		+		+
x+1	-		-		-	0	+		+
x-3	-		-		-		-	0	+
R(x)	+	$\frac{1}{2}$	-	0	+	$\frac{1}{2}$	-	0	+

$$\therefore x \in (-\infty, -6) \cup [-2, -1) \cup [3, \infty)$$

$$(b) \quad |x+1| + |3x+5| = |2x-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x+1| + |3x+5| - |2x-1| = 0 \quad (*)$$

$$\text{Brytpunkter: } x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{5}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{2}$$



I. $x < -5/3$: (*) $\Leftrightarrow -(x+1) - (3x+5) + 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \in (-\infty, -\frac{5}{3})$ ok!

II. $-5/3 \leq x < -1$: (*) $\Leftrightarrow -(x+1) + 3x + 5 + 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \notin [-\frac{5}{3}, -1)$ falsk
rot!

III. $-1 \leq x < 1/2$: (*) $\Leftrightarrow x + 1 + 3x + 5 + 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6} \in [-1, \frac{1}{2})$ ok!

IV. $1/2 \leq x$: (*) $\Leftrightarrow x + 1 + 3x + 5 - (2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \notin [\frac{1}{2}, \infty)$ falsk
rot!

$\therefore x_1 = -\frac{7}{2} \quad , \quad x_2 = -\frac{5}{6}$

$$(a) \quad 2x^2 + 12x - y + 22 = 0 \Leftrightarrow y = 2(x^2 + 6x) + 22$$

$$\Leftrightarrow y = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2) + 22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2((x+3)^2 - 9) + 22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2(x+3)^2 - 18 + 22 \Leftrightarrow y = 2(x+3)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow y - 4 = 2(x+3)^2$$

$\therefore$ Parabel med min./centrum/vertex
i $(-3, 4)$.

$$(b) \quad 9x^2 + 18x + 4y^2 - 8y - 23 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2) + 4(y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 1^2) - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9((x+1)^2 - 1) + 4((y-1)^2 - 1) - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x+1)^2 - 9 + 4(y-1)^2 - 4 - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$$

$\therefore$ Ellips med centrum i $(-1, 1)$ och
halvaxlar $a=2$ och $b=3$.

$$(c) \quad 16x^2 + 64x - 4y^2 + 20y + 39 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2 + 4x) - 4(y^2 - 5y) + 39 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2) - 4(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{5}{2} + (\frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2) + 39 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16((x+2)^2 - 4) - 4((y - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}) + 39 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(x+2)^2 - 64 - 4(y - \frac{5}{2})^2 + 25 + 39 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(x+2)^2 - 4(y - \frac{5}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(x+2)^2 = 4(y - \frac{5}{2})^2 \Leftrightarrow 4(x+2)^2 = (y - \frac{5}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{5}{2} = \pm 2(x+2)$$

$$(i) \quad y - \frac{5}{2} = 2x + 4 \Leftrightarrow y = 2x + \frac{13}{2}$$

$$(ii) \quad y - \frac{5}{2} = -2x - 4 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{3}{2}$$

$\therefore$ Två räta linjer:

$$y = 2x + \frac{13}{2} \quad \text{och} \quad y = -2x - \frac{3}{2}$$