MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA & GÖTEBORGS UNIVERSITET

Linjär algebra, TMV216/MMGD20

Tentamen: 2022-04-12, 14.00–18.00
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel tillåtna

Betygsgränser TMV216: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5
MMGD20: 20 poäng – G, 35 poäng – VG

Examinator: Tobias Gebäck, 031-772 35 47
Motivera dina svar och redovisa dina lösningar utförligt och fullständigt för full poäng.
Endast svar ger inga poäng.

---

1. Betrakta ekvationssystemet (7p)

$$\begin{cases} x - 2y + az = 2 \\ 2ax + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Bestäm a så att systemet har oändligt många lösningar. Bestäm också dessa lösningar.

2. Punkterna $P = (3, -6, 3)$ och $Q = (1, -6, 0)$, samt planet π med ekvationen $2x - 3y + 6z + 7 = 0$ är givna.

a) Visa att P och Q ligger på samma sida om π. (2p)

b) P:s spegelbild i π är P'. Beräkna koordinaterna för P'. (4p)

c) Bestäm en ekvation för linjen som går genom Q och P'. (2p)

3. Bestäm lösningen X till matrisekvationen (7p)

$$AXB + 2AX = C^T,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VÄND!

4. Sätt $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Vilken dimension har det rum som spänns av $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$? (2p)

b) Låt A vara matrisen med kolonnvektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$. Vad är nolldimensionen för A och nolldimensionen för A^T? (4p)

c) Bestäm en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ som inte ligger i värderummet $V(A)$. (2p)

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Diagonalisera A (eller visa att det inte är möjligt). (5p)

b) Beräkna matrisen A^{10}. (3p)

6. a) Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avbildar vektorerna $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(1,1,1)$ på vektorerna $(1,1,0)$, $(2,0,1)$ respektive $(2,0,3)$. Bestäm avbildningsmatrisen för F (i standardbasen). (3p)

b) En medstudent påstår att F beskriver en rotation kring linjen

$$(x, y, z) = t(2, 3, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Har hen rätt? Motivera! (3p)

7. Antag att A är en kvadratisk matris som uppfyller $A^4 = 0$.

a) Visa att $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$. (4p)

b) Beräkna $\det A$. Motivering krävs. (2p)

Lycka till! /TG

Lösningar:

1. Gausselimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 2 \\ 2a & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 2 \\ 0 & 2+4a & 3-2a^2 & 3-4a \\ 0 & 6 & 1-2a & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 2 \\ 0 & 6 & 1-2a & -3 \\ 0 & 2+4a & 3-2a^2 & 3-4a \end{array}\right]$$

För att eliminera den sista radens andra element multiplicerar vi rad 2 med $-(2+4a)/6 = -(1+2a)/3$ och adderar till rad 3. Sista radens tredje element blir då

$$3 - 2a^2 - \frac{1}{3}(1+2a)(1-2a) = \frac{1}{3}(8-2a^2) = \frac{2}{3}(4-a^2)$$

och det sista elementet blir

$$3 - 4a - \frac{1}{3}(1+2a)(-3) = 4 - 2a.$$

För att systemet skall ha oändligt många lösningar måste sista raden bestå av enbart nollor, dvs vi måste ha

$$4 - a^2 = 0, \qquad \text{och} \qquad 4 - 2a = 0,$$

vilket ger lösningen $a = 2$.

Med $a = 2$ fås den eliminerade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Om vi sätter $z = t$ får vi $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$ och $x = 2 - 2z + 2y = 1 - t$. Lösningarna beskrivs alltså av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

2. Vi har att t.ex. $P_0 = (-2, 1, 0)$ ligger i planet och $\mathbf{n} = (2, -3, 6)$ är normal till planet.

a) Vi har $\overrightarrow{P_0P} = (3, -6, 3) - (-2, 1, 0) = (5, -7, 3)$ och $\overrightarrow{P_0Q} = (1, -6, 0) - (-2, 1, 0) = (3, -7, 0)$. Då $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 49$ och $\overrightarrow{P_0Q} \cdot \mathbf{n} = 27$ har samma tecken så ligger P och Q på samma sida om planet.

b) Spegelbilden P':s koordinater ges av

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2\frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = (3, -6, 3) - 2\frac{49}{49}(2, -3, 6) = (-1, 0, -9)$$

c) Ekvationen ges av $\mathbf{x} = \overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{QP'}, t \in \mathbb{R}$, dvs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. Matrisalgebra ger att

$$AXB + 2AX = AXB + AX(2I) = AX(B + 2I)$$

så att lösningen är

$$X = A^{-1}C^T(B + 2I)^{-1}$$

om inverserna existerar. Vi har att $B + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ och invertering av matriserna ger

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (B + 2I)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Låt A vara matrisen med kolonnvektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$.

a) Rummet som spänns av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ är $V(A)$. Gausseliminering ger

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 9 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi har alltså $\dim V(A) = \text{rang } A = 2$.

(Alternativt kan man ganska enkelt se att $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_4 = -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, medan $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt oberoende.)

b) Enligt dimensionssatsen är

$$\text{nolldim } A = n - \dim V(A) = 4 - 2 = 2$$

och eftersom det gäller att $\text{rang } A^T = \text{rang } A$ är

$$\text{nolldim } A^T = m - \dim V(A^T) = m - \dim V(A) = 4 - 2 = 2.$$

(Här är m och n antalet rader resp. kolonner i A).

c) Det är tydligt att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt oberoende (de är inte parallella), och därmed spänner de $V(A)$ (som har dimension 2). Med ledning av nollorna i $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är det uppenbart att t.ex. $\mathbf{u} = (0, 1, -1, 0)^T$ inte kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ och därmed inte ligger i $V(A)$.

5. a) A är symmetrisk och är alltså diagonaliserbar. Vi bestämmer egenvärdena till A genom att lösa ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 \\ 2 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(9 - \lambda) - 2 \cdot 2 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$$

ger $\lambda = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225-200}{4}} = \frac{15\pm5}{2}$, dvs $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = 10$. Egenvektorerna ges av lösningar till $(A - \lambda_j I)\mathbf{x} = 0$, $j = 1, 2$:

$$\lambda = 5: \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 10: \qquad \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

där egenvektorerna har normerats (och är ortogonala).

Matrisen A diagonaliseras alltså som $A = SDS^T$, där

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

och

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

b) Eftersom $S^T S = I$ är matrisen

$$A^{10} = SD^{10}S^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5^9 \begin{pmatrix} 2^{10}+4 & 2^{11}-2 \\ 2^{11}-2 & 2^{12}+1 \end{pmatrix}$$

6. a) Avbildningsmatrisen $A = (F(\mathbf{e}_1)\ F(\mathbf{e}_2)\ F(\mathbf{e}_3))$ där $F(\mathbf{e}_3) = F((1,1,1)) - F(\mathbf{e}_1) - F(\mathbf{e}_2) = (2,0,3) - (1,1,0) - (2,0,1) = (-1,-1,2)$ eftersom F är linjär. Alltså är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Studenten har fel. För att avbildningen skall vara en rotation måste avbildningsmatrisen vara ortogonal och därmed ha $\det A = \pm 1$. Men $\det A = -4$ så det är inte sant. En annan motivering är att vid rotation kring den givna linjen måste vektorn $\mathbf{v} = (2,3,-1)^T$ avbildas på sig själv, men $F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = (9,3,1)^T$, varför det inte stämmer.

7. a) Det räcker att visa att $(I + A + A^2 + A^3)(I - A) = I$, ty då är $(I + A + A^2 + A^3)$ vänster-invers till $I - A$ och därmed invers. Men

$$\begin{aligned}(I + A + A^2 + A^3)(I - A) &= I + A + A^2 + A^3 - A(I + A + A^2 + A^3) \\ &= I + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 = I - A^4 = I - 0 = I\end{aligned}$$

enligt förutsättningen. Alltså är $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$.

b) Enligt regeln för determinanten av en produkt gäller att

$$\det A^4 = (\det A)^4$$

Men då $A^4 = 0$ är $\det A^4 = 0$ är därmed är $\det A = 0$.