MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA & GÖTEBORGS UNIVERSITET

Linjär algebra, TMV216/MMGD20

Tentamen: 2022-01-13, 14.00–18.00
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel tillåtna

Betygsgränser TMV216: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5
MMGD20: 20 poäng – G, 35 poäng – VG

Examinator: Tobias Gebäck, 031-772 35 47
Motivera dina svar och redovisa dina lösningar utförligt och fullständigt.
Endast svar ger inga poäng.

---

1. Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (5p)

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ -x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$$

2. Linjerna l_1 och l_2 är givna av

$$l_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \qquad l_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

a) Bestäm skärningspunkten mellan de två linjerna. (2p)

b) Bestäm ekvationen (på affin form) för det plan som innehåller båda linjerna. (4p)

c) Beräkna avståndet från punkten $(3, -1, 1)$ till planet i b). (3p)

3. Lös matrisekvationen (5p)

$$ABX = AC,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sätt $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) För vilket värde på a är $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt beroende? (3p)

b) Låt A vara matrisen med kolonnvektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ då a antar värdet som bestämts i a). Bestäm nollrummet, nolldimensionen och rangen för A. (4p)

VÄND!

5. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Visa att $\lambda = 3$ är ett egenvärde till matrisen A. (2p)

b) Beräkna alla egenvärden och egenvektorer till A. (5p)

c) Är A diagonaliserbar? Motivera! (2p)

6. Låt $\mathbf{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Bestäm $\mathbf{u}_3$ så att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ bildar en positivt orienterad ortonormerad bas. (2p)

b) En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har avbildningsmatris (5p)
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
i standardbasen. Vad blir avbildningsmatrisen i basen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$? Tolka även avbildningen geometriskt.

7. En matris A kallas *normal* om den uppfyller $A^T A = AA^T$.

a) Visa att alla ortogonala matriser är normala. (2p)

b) Visa att alla symmetriska matriser är normala. (2p)

c) Ge ett exempel på en 2×2-matris som är normal, men varken ortogonal eller symmetrisk. (4p)

Lycka till! /TG

Lösningar:

1. Gausselimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 7 & -11 & 3 \\ 0 & 14 & -22 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 7 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sätt $z = t$ så fås

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t}{7}\begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

2. a) Sätt x, y, z lika för de två linjerna så fås

$$\begin{cases} 3 + t_1 = 2 - t_2 \\ -1 - 2t_1 = 1 \\ -1 - t_1 = -t_2 \end{cases}$$

med lösningen $t_1 = -1$, $t_2 = 0$ som ger skärningspunkten $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

b) Planet bestäms av punkten $\mathbf{x}_0 = (2, 1, 0)$ som ligger i planet, samt de två riktningsvektorerna för linjerna: $\mathbf{v}_1 = (1, -2, -1)$ och $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1)$. En normalvektor är $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \ldots = (2, 2, -2)$ och $d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 = 6$. Alltså är planets ekvation

$$2x + 2y - 2z = 6 \quad (\text{eller} \quad x + y - z = 3)$$

c) Sätt $\mathbf{u} = (3, -1, 1)$. Avståndet ges av längden av projektionen av $\mathbf{u} - \mathbf{x}_0$ på normalen (notera att planet inte går genom origo), alltså

$$a = \frac{|(\mathbf{u} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(1, -2, 1) \cdot (2, 2, -2)|}{\sqrt{12}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. Multiplicera ihop AB och AC så fås ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Gausselimiering ger

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 6 & -4 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -12 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 0 & 32 & -88 \\ 0 & 2 & -12 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & -6 & 15 \end{array}\right)$$

Så lösningen är $X = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$

(Man kan också lösa en kolonn i taget, eller beräkna $(AB)^{-1}$.)

4. a) Låt A vara matrisen med kolonnvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Vektorerna är linjärt beroende då $\det A = 0$, dvs då

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (a + 1) = 3 - a$$

dvs då $a = 3$.

b) Gausselimination av systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

med allmän lösning $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, som beskriver nollrummet. Nolldimensionen är alltså 1 och rangen $= 3 - 1 = 2$ (vilket också syns på de två pivotelementen).

5. a)

$$\det(A - 3I) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4(-8+8) = 0$$

Alltså är $\lambda = 3$ ett egenvärde.

b) Egenvärden ges av

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((5-\lambda)(3-\lambda) - 16) - 4((5-\lambda)\cdot 4) \\ &= (3-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) - 16(1-\lambda+(5-\lambda)) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5 - 32) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda - 27) \end{aligned}$$

med lösning $\lambda_1 = 3$ eller då $\lambda^2 - 6\lambda - 27 = 0$, vilket ger $\lambda_2 = -3$ och $\lambda_3 = 9$.

Egenvektorer: Sätt in λ_i och lös $(A - \lambda_i I)\mathbf{u}_i = 0$ för $i = 1, 2, 3$, vilket ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{u}_1 = t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{u}_2 = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{u}_3 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

c) Ja, matrisen är diagonaliserbar enligt spektralsatsen eftersom den är symmetrisk. Alternativt ser vi ovan att alla egenvärden är olika, vilken enligt en sats vi bevisat medför att matrisen är diagonaliserbar. Eller också kontrollerar man att egenvektorerna är linjärt oberoende.

6. a) Vi noterar att $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är ortogonala och har längden 1. Om vi sätter $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \ldots = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$ får vi därför en positivt orienterad ON-bas.

b) Avbildningsmatrisen i den nya basen är $\tilde{A} = S^T A S$ där S är matrisen vars kolonner är basvektorerna. Alltså är (om vi bryter ut $1/\sqrt{6}$ från S)

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Avbildningen är en projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $\mathbf{u}_1$.

7. a) En ortogonal matris uppfyller $A^T A = I = AA^T$ och uppfyller alltså villkoret för att vara normal.

b) Om A är symmetrisk gäller $A^T = A$ och därför gäller att $A^T A = AA = AA^T$, dvs A är normal.

c) Ansätt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Villkoret $A^T A = AA^T$ ger då att

$$\begin{cases} b^2 = c^2 \\ ac + bd = ab + cd \end{cases}$$

Dessutom måste vi ha $b \neq c$ om A inte skall vara symmetrisk. Tag till exempel $b = 1$ och $c = -1$. Det andra villkoret ger då $2a = 2d$ och vi kan välja t.ex. $a = d = 1$. Vi sätter alltså

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och kontrollerar att A inte är ortogonal, eftersom $A^T A = 2I$. (Notera att $a = d = 0$ inte fungerar ty då blir A ortogonal).