**Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet**

# Tentamen på kursen TMV216/MMGD20: Linjär algebra

Den 14 Januari 2021 kl 14:00-18:00

Examinator: Jonathan Nilsson

---

*Alla hjälpmedel är tillåtna, dock är ingen form av samarbete eller kommunikation tillåten. Denna tes har sex frågor. Maxpoäng är 60p. För godkänt krävs minst 30p.*
*För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa. Skriv tydligt vad ditt svar är på varje uppgift. Lösningar som är oläsliga eller inte går att följa eller som innehåller endast svar bedöms som noll poäng. Börja varje uppgift på en ny sida. Du har en extra halvtimme på dig efter tentans slut till att skanna in och ladda upp dina lösningar. Inlämningen ska bestå av en enda Pdf-fil innehållande alla lösningarna i ordning. Det är ditt eget ansvar att se till att detta fungerar.*

---

1. För varje värde på parametern $a$, ange *antalet lösningar* till ekvationssystemet nedan. Motivera dina svar. [10p]

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ \ z = 1 \\ ax + 2y + \ 2z = 3 \\ ax + ay + a^3 z = a^2 \end{cases}$$

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Hitta alla $2 \times 2$-matriser $X$ och $Y$ som uppfyller de två matrisekvationerna $AX + 2X + A = I$ respektive $YA + 2Y = Y$. [10p]

3. En ljusstråle $\ell : \ (x, y, z) = (3, 6, -5) + t(-1, -1, 2)$ där $t \in \mathbb{R}$ faller in mot det speglande planet $\pi : \ 2x + y + z = 4$. Hitta parameterformen för den speglade strålen $\ell'$. *Tips: Börja med att hitta spegelbilden av* $(3, 6, -5)$ *i planet.* [10p]

4. För vart och ett av nedanstående påståenden, ange om det är sant eller falskt. Endast svaret räknas. Rätt svar ger 1p, fel svar ger -1p, inget svar eller tvetydigt svar ger 0p. Totalpoängen på uppgiften kan dock inte bli negativ. Sammanfatta dina svar tydligt i en tabell. [10p]

   (a) Matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar.

   (b) $P : (1, -2, 3)$ och $Q : (3, 0, 1)$ ligger på samma sida om planet $x + y + z = 0$.

   (c) Om $\det(A) = 1$ så är $A$ en ortogonal matris.

   (d) $\det(A) = \det(-A)$ för kvadratiska matriser $A$.

   (e) Om $\det(5I + A) = 0$ så har $A$ har egenvärdet $-5$.

   (f) De tre vektorerna $\{(1, 1, 1), (2, 0, 2), (0, 3, 0)\}$ är linjärt beroende.

   (g) Avståndet mellan planen $\pi_1 : \ x + y - z = 5$ och $\pi_2 : \ x + y - z = 0$ är 5.

   (h) Låt $P$ vara avbildningsmatrisen för projektion på ett plan. Då gäller $P^2 = P$.

   (i) Vektorerna $(u, v) = ((1, 3), (2, 5))$ är positivt orienterade.

   (j) Det finns vektorer i planet $x + 2y + 3z = 0$ som är vinkelräta mot $(1, 3, 5)$.

*Fortsättning på nästa sida*

5. Avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projicerar vektorer på planet $\pi :\ x + 2z = 0$ i riktningen $(1, 1, 1)$. Med andra ord så avbildar $F$ punkten $(x, y, z)$ på den punkt $(x, y, z) + t(1, 1, 1)$ som ligger i planet $\pi$. [10p]

   (a) Ange alla egenvärden och egenvektorer till $F$ (endast svar krävs).

   (b) Hitta avbildningsmatrisen för $F$ med avseende på standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

   (c) Vi definierar en ny funktion $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ via $G(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - F(\mathbf{v})$. Hitta egenvärden och egenvektorer för $G$. Beskriv också den geometriska innebörden av $G$ så tydligt som möjligt. *Tips: Använd resultatet i (a).*

6. För varje $n \geq 1$ definierar vi en $n \times n$-matris $A_n$ enligt [10p]

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ 3 & 2 & -1 & & & \\ & 3 & 2 & -1 & & \\ & & 3 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

   Matrisen har alltså 2:or på diagonalen, 3:or ett steg under diagonalen, $-1$:or ett steg över diagonalen, och nollor på alla andra positioner.

   Beräkna determinanten $D_n = \det(A_n)$ för varje $n \geq 1$.

   *Tips: Börja med att hitta ett rekursivt samband för $D_n$ och uttryck detta samband med hjälp av en $2 \times 2$-matris.*

*Lycka till!*