# Tentamen TMV216/MMGD20

Datum: 12 Juni 2020, 08.30
Telefonvakt: Axel Flinth, 0701-757469
Hjälpmedel: Linjal, penna, kladdpapper, ordbok.
Betygsgränser: (TMV216) 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5.
(MMDGU20) 20 poäng för betyget G, 35 för betyget VG.
Det finns totalt 50 poäng att samla.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**
Tentamen består av **sju (7)** uppgifter. Tesen består av **tre (3)** blad.

**Lycka till!**

**Uppgift 1** **(8p)**

Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2 \end{array}$$

(a) Vilken matris är systemets totalmatris? (1p)

(b) Använd Gaussalgoritmen för att omforma totalmatrisen till trappstegsform. (3p)

(c) Vilka kolumner i den omformade totalmatrisen är fria respektive pivotkolumner? (1p)

(d) Avgör huruvida ekvationen har lösningar, och bestäm i sådana fall samtliga lösningar. (3p)

**Uppgift 2** **(7p)**

Betrakta följande matris

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm egenvärden och egenvektorer för $A$.

**Uppgift 3** **(7p)**

Betrakta de tre punkterna

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i planet.

1. Bestäm ekvationer för normal- och parameterform för linjen $\ell$ som går genom punkterna $P_1$ och $P_2$. (5p)

2. Ligger $P_3$ på $\ell$? (2p)

**Uppgift 4** **(7p)**

Betrakta den linjära avbildningen

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm $\mathcal{G}$:s avbildningsmatris med avseende på standardbasen. (3p)

(b) Låt $K \subseteq \mathbb{R}^3$ vara enhetskuben. Hur stor volym har

$$\mathcal{G}(K) = \left\{ \mathcal{G}(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

alltså den mängd $K$ avbildas på av $\mathcal{G}$? (2p)

(c) Är $\mathcal{G}$ inverterbar? *Du behöver i sådana fall inte bestämma* $\mathcal{G}^{-1}$. (2p)

**Uppgift 5** **(7p)**

Betrakta för $a \in \mathbb{R}$ matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Motivera att $\mathcal{N}(B)$, $B$:s nollrum, innehåller minst en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ för varje värde på $a$. (2p)

(b) För vilka värden på $a$ gäller

$$\operatorname{rang}(B) = 3?$$

(3p)

(c) Betrakta nu istället, för $b \in \mathbb{R}$, matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b & b^2 - 5 \\ 1 & 3 & b^4 - b & b^2 - 1 + b \\ 2 & 1 & b^2 & b \end{pmatrix}.$$

Finns det ett värde på $b$ så att

$$\operatorname{rang}(C) = 1?$$

(2p)

**Uppgift 6** **(8p)**

En forskargrupp äter lunch tillsammans varje dag. De har fyra restauranger att välja på. Forskargruppen äter aldrig på samma restaurang två dagar i rad. De väljer istället slumpmässigt en av de övriga tre restaurangerna. Sannolikhet för att välja var och en av de de tre andra restaurangerna är lika stor.

(a) Beskriv en graf och en Markovkedja på den som modellerar forskargruppens restaurangbesök. Bestäm speciellt Markovkedjans övergångsmatris. (4p)

(b) Bestäm en stationär fördelningen för Markovkedjan. (2p)

(c) Forskargruppen har gjort såhär under en mycket lång tid. Motivera att sannolikheterna för att forskargruppen väljer de olika restaurangerna ges av vektorn du beräknade i (b). (2p)

**Uppgift 7** **(6p)**

Låt $A \in \mathbb{R}^{2,2}$.

(a) Antag att $A$ inte har egenvärdet 1. Vilken rang har då $(A - I_2)$? (2p)

(b) Låt $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den affina avbildningen som ges av matrisen $A$ och translationsvektorn $\mathbf{b}$, alltså

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, P \mapsto AP + \mathbf{b}.$$

Antag att $A$ inte har egenvärdet 1. Bevisa att $\Phi$ har en fixpunkt, dvs. att det existerar en punkt $P^*$ med $\Phi(P^*) = P^*$. (4p)

## Tentamen TMV216/MMGD20

Datum: 7 april 2020
Telefonvakt: Axel Flinth, 0701-757469
Hjälpmedel: Linjal, penna, kladdpapper, ordbok.
Betygsgränser: (TMV216) 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5.
(MMDGU20) 20 poäng för betyget G, 35 för betyget VG.
Det finns totalt 50 poäng att samla.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**
Tentamen består av **sju (7)** uppgifter. Tesen består av **tre (3)** blad.

**Lycka till!**

### Uppgift 1 (8p)

Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 \quad & & +x_3 \quad &= 1 \\ 2x_1 \quad & +x_2 & +2x_3 \quad &= 3 \\ x_1 \quad & +x_2 & +x_3 \quad &= 2 \end{aligned}$$

(a) Vilken matris är systemets totalmatris? (1p)

(b) Använd Gaussalgoritmen för att omforma totalmatrisen till trappstegsform. (3p)

(c) Vilka kolumner i den omformade totalmatrisen är fria respektive pivotkolumner? (1p)

(d) Avgör huruvida ekvationen har lösningar, och bestäm i sådana fall samtliga lösningar. (3p)

*Lösning.* (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Vi genomför Gaussalgoritmen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(ii)-2(i)\to(ii) \\ (iii)-(i)\to(iii)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(iii)-(ii)\to(iii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Kolumn 3 och 4 är fria, och kolumn 1 och 2 är pivotkolumner.

(d) Eftersom den sista kolumnen är fri har systemet lösningar. Eftersom den tredje kolumnen är fri kan vi parametrisera $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Värdet av de andra variablerna bestämmer vi genom bakåtsubstition:

$$x_2 = 1$$
$$x_1 + x_3 = x_1 + t = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - t.$$

Vi får alltså lösningsmängden

$$\begin{cases} x_1 & = 1 - t \\ x_2 & = 1 \\ x_3 & = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

□

**Uppgift 2** **(7p)**

Betrakta följande matris

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm egenvärden och egenvektorer för $A$.

*Lösning.* Vi börjar med att bestämma $A$:s karakteristiska polynom

$$p_A(t) = \det(t \cdot I_3 - A) = \begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ -1 & t-2 & -3 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix}.$$

Vi kan använda Sarrus regel för att bestämma värdet av determinanten:

$$\left|\begin{matrix} t & 1 & 2 \\ -1 & t-2 & -3 \\ 0 & 0 & t-1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} t & 1 \\ -1 & t-2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = t(t-2)(t-1) - 0 - 0 - 0 - 0 - (-1) \cdot 1 \cdot (t-1)$$
$$= (t-1)(t^2 - 2t + 1) = (t-1)^3.$$

Det här polynomet har det trippla nollstället $t = 1$. $A$:s enda egenvärde är således 1.

För att bestämma egenvektorer till egenvärdet 1 bestämmer vi nollrummet till matrisen $I_3 - A$

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(ii)+(i)\to(ii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Den här matrisen är redan i trappstegsform. Den andra kolumnen är fri, så att vi sätter $x_2 = t$. Värdet av de andra variablerna bestäms sedan med hjälp av bakåtsubstitution - man erhåller att mängden av alla egenvektorer till egenvärdet 1 är

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

**Uppgift 3** **(7p)**

Betrakta de tre punkterna

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i planet.

1. Bestäm ekvationer för normal- och parameterform för linjen $\ell$ som går genom punkterna $P_1$ och $P_2$. (5p)
2. Ligger $P_3$ på $\ell$? (2p)

*Lösning.* (a) För att bestämma linjens ekvation på parameterform behöver vi räkna ut en riktningsvektor $\mathbf{v}$ för linjen. Vi kan t.ex. använda förbindningsvektorn mellan punkterna $P_1$ och $P_2$ för denna:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Parameterformen är alltså

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

För att bestämma normalformen för linjens ekvation bestämmer vi först en normalvektor till linjen, alltså en vektor $\mathbf{n}$ med $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Här duger till exempel

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vet nu att linjens ekvation har formen $\{P \mid \langle P, \mathbf{n} \rangle = \alpha\}$ för något $\alpha \in \mathbb{R}$. Vi bestämmer värdet på $\alpha$ genom att utnyttja att $P_1$ ligger på linjen, så att

$$\alpha = \langle P_1, \mathbf{n} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2.$$

Normalformsframställningen för linjen är alltså

$$\left\langle P, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2.$$

(b)Vi kan avgöra huruvida $P_3$ ligger på linjen genom att undersöka om den uppfyller normalekvationen. Då vi har

$$\left\langle P_3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 + 1 = 4 \neq 2,$$

ligger $P_3$ *inte* på $\ell$. □

**Uppgift 4** **(7p)**

Betrakta den linjära avbildningen

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm $\mathcal{G}$:s avbildningsmatris med avseende på standardbasen. (3p)

(b) Låt $K \subseteq \mathbb{R}^3$ vara enhetskuben. Hur stor volym har

$$\mathcal{G}(K) = \left\{ \mathcal{G}(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

alltså den mängd $K$ avbildas på av $\mathcal{G}$? (2p)

(c) Är $\mathcal{G}$ inverterbar? *Du behöver i sådana fall inte bestämma $\mathcal{G}^{-1}$.* (2p)

*Lösning.* (a) Vi bestämmer $\mathcal{G}(\mathbf{e}_i)$ för $i = 1, \ldots, 3$:

$$\mathcal{G}(\mathbf{e}_1) = \mathcal{G}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{e}_2) = \mathcal{G}\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{e}_3) = \mathcal{G}\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avbildningsmatrisen får alltså följande utseende

$$A_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathcal{G}$ förändrar volymer med en faktor $|\det(A_{\mathcal{G}})|$. Vi beräknar determinanten med hjälp av Sarrus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2.$$

Vi får alltså

$$|\mathcal{G}(K)| = |\det(A_{\mathcal{G}})|\,|K| = 2 \cdot 1 = 2.$$

(c) Ja, $\mathcal{G}$ är inverterbar. Vi vet att $\mathcal{G}$ är inverterbar precis när $A_{\mathcal{G}}$ är det, och det är den på grund av att $\det(A_{\mathcal{G}}) \neq 0$. $\square$

**Uppgift 5** **(7p)**

Betrakta för $a \in \mathbb{R}$ matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Motivera att $\mathcal{N}(B)$, $B$:s nollrum, innehåller minst en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ för varje värde på $a$. (2p)

(b) För vilka värden på $a$ gäller

$$\operatorname{rang}(B) = 3?$$

(3p)

(c) Betrakta nu istället, för $b \in \mathbb{R}$, matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b & b^2 - 5 \\ 1 & 3 & b^4 - b & b^2 - 1 + b \\ 2 & 1 & b^2 & b \end{pmatrix}.$$

Finns det ett värde på $b$ så att

$$\operatorname{rang}(C) = 1?$$

(2p)

*Lösning.* (a) Eftersom $B$ har fler rader än kolumner kommer dess reducerade trappstegsform, oberoende av värdet på $a$, ha minst en fri kolumn. Därmed kommer det finnas minst en lösning $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ till ekvationen $B\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Denna vektor är per definition ett element i $B$:s nollrum.

(b) För att bestämma $B$:s rang använder vi Gaussalgoritmen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(iii)-2(i)\to(iii)}]{(ii)-(i)\to(ii)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 0 & 0 & -1-a & 0 \\ 0 & 5 & 3-2a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(iii)\leftrightarrow(ii)]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 0 & 5 & 3-2a & 0 \\ 0 & 0 & -1-a & 0 \end{pmatrix}$$

Här ser vi att vi får tre pivotkolumer såvida inte $-1-a=0$. Med andra ord, för alla $a \neq -1$ gäller $\text{rang}(B) = 3$.

(c) Nej. De två första kolumnerna i $C$ är linjärt oberoende. Därmed är dimensionen för $\mathcal{R}(C)$ minst 2. Då $\dim \mathcal{R}(C) = \text{rang}(C)$ kan således $C$:s rang aldrig vara lika med 1. □

**Uppgift 6** **(8p)**

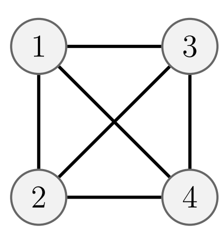
En forskargrupp äter lunch tillsammans varje dag. De har fyra restauranger att välja på. Forskargruppen äter aldrig på samma restaurang två dagar i rad. De väljer istället slumpmässigt en av de övriga tre restaurangerna. Sannolikhet för att välja var och en av de de tre andra restaurangerna är lika stor.

(a) Beskriv en graf och en Markovkedja på den som modellerar forskargruppens restaurangbesök. Bestäm Markovkedjans övergångsmatris. (4p)

(b) Bestäm en stationär fördelningen för Markovkedjan. (2p)

(c) Forskargruppen har gjort såhär under en mycket lång tid. Motivera att sannolikheterna för att forskargruppen väljer de olika restaurangerna ges av vektorn du beräknade i (b). (2p)

*Lösning.* (a) Det går att modellera forskargruppens restaurangval med en ren slumpvandring på grafen med fyra noder, där varje par av noder är förbundna med en kant.



Då vi i varje nod väljer en av de andra tre med lika stor sannolikhet ges övergångsmatrisen för Markovkedjan av

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) En möjlig lösning är att man genom grafens symmetri ser att

$$\mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

måste vara en stationär fördelning. Genom att kontrollera att $T\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^*$ visar man det också strikt matematiskt.

Man kan också lösa uppgiften mer 'mekaniskt' som följer: Stationära fördelningar till Markovkedjan är egenvektorer till övergångsmatrisen till egenvärdet 1. Vi räknar ut dem genom att bestämma $T - I_3$:s nollrum:

$$T - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3(ii)\to(ii)\\ 3(iii)\to(iii)\\ 3(iv)\to(iv)}]{} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{(ii)+(i)\to(ii)\\ (iii)+(i)\to(iii)\\ (iv)+(i)\to(iv)}]{} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(iii)+0.5(ii)\to(iii)\\ (iv)+0.5(ii)\to(iv)}]{} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{3} & \frac{6}{3} \\ 0 & 0 & \frac{6}{3} & -\frac{6}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(iv)-(ii)\to(iv)]{} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{3} & \frac{6}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Här är den sista kolumnen fri, så att $p_4 = t$, och vi kan nu via successiv bakåtsubstitution räkna ut att mängden av lösningar till egenvärdesekvationen är

$$\mathbf{p} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

Sätter vi $t = \frac{1}{4}$ får vi den stationära fördelningen (det är bara då summan av elementen blir lika med 1.

(c) Markovkedjan är sammanhängande och aperiodisk. Därför kommer fördelnignen, oavsett vilken fördelning forskargruppen använde när den valde sin första restaurang, att efter lång tid ha konvergerat till den stationära fördelningen. Sannolikheten att de väljer en viss restaurang är alltså mycket nära 0.25.

$\square$

**Uppgift 7** **(6p)**

Låt $A \in \mathbb{R}^{2,2}$.

(a) Antag att $A$ inte har egenvärdet 1. Vilken rang har då $(A - I_2)$? (2p)

(b) Låt $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den affina avbildningen som ges av matrisen $A$ och translationsvektorn $\mathbf{b}$, alltså

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, P \mapsto AP + \mathbf{b}.$$

Antag att $A$ inte har egenvärdet 1. Bevisa att $\Phi$ har en fixpunkt, dvs. att det existerar en punkt $P^*$ med $\Phi(P^*) = P^*$. (4p)

*Lösning.* (a) Egenvärdena $\lambda$ till en matris är precis de värden för vilka $A - \lambda I$ inte är inverterbara. Om $A$ inte har egenvärdet 1 är alltså $A - I_2$ inverterbar, och därmed har den rang 2.

(b) Vi måste bevisa att ekvationen $\Phi(P) = P$ har en lösning. Vi har

$$P = \Phi(P) = AP + \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{b} = P - AP = (I_2 - A)P \;\Leftrightarrow\; P = (I_2 - A)^{-1}\mathbf{b},$$

där vi i det sista steget använde att $I_2 - A$ är inverterbar. $(I_2 - A)^{-1}\mathbf{b}$ är alltså den sökta fixpunkten. $\square$