Matematik
Chalmers tekniska högskola 2018-01-11

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 1097 Plats och tid: SB, 14:00-18:00
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

SVAR och LÖSNINGSFÖRSLAG

Ifall någon undrar, så var det uppgift 1(a) och 4(a) som jag plockat från bokens övningar.

---

1 (a) Beräkna determinanten (3p)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(b) En skevsymmetrisk matris är en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ där $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$.

(i) Ge exempel på en 3×3 skevsymmetrisk matris som inte är nollmatrisen. (3p)

(ii) Visa att om $\boldsymbol{A}$ är en 5×5 skevsymmetrisk matris så är $\det(\boldsymbol{A}) = 0$. (4p)

(a) Svar: 1

(i) (i) Svar: tex. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) (ii) $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^T) = \det(-\boldsymbol{A}) = (-1)^5 \det(\boldsymbol{A})$, dvs. $\det(\boldsymbol{A}) = -\det(\boldsymbol{A})$, dvs. determinanten är 0.

---

2 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Svara på följande tre frågor. Motivera dina svar noggrant.

(i) Tillhör $\boldsymbol{u}$ nollrummet till matrisen $\boldsymbol{A}$? (3p)

(ii) Tillhör $\boldsymbol{u}$ kolumnrummet till $\boldsymbol{A}$? (4p)

(iii) Vilken rang har $\boldsymbol{A}$? (1p)

(b) Låt $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ vara de två första kolumnvektorerna i $\boldsymbol{A}$ ovan och låt (3p)

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{I} - \frac{1}{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2^T)\boldsymbol{a}_1$$

(i) Är de två vektorerna $\boldsymbol{a}_2$ och $\boldsymbol{v}$ linjärt oberoende? Motivera ditt svar.

(ii) Är de tre vektorerna $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ och $\boldsymbol{v}$ linjärt beroende? Motivera ditt svar.

(a) (i) $\boldsymbol{u}$ tillhör nollrummet till $\boldsymbol{A}$ eftersom

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Nej, $\boldsymbol{u}$ ligger inte i kolumnrummet till $\boldsymbol{A}$ eftersom $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ saknar lösning.

$$\left[\ \boldsymbol{A} \ \mid \ \boldsymbol{u}\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ -3 & -5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) Rang 2 ($\boldsymbol{A}$ har två pivotkolumner, se (ii))

(b) (i) Ja, de är ortogonala:

$$\boldsymbol{a}_2^T(\boldsymbol{I} - \frac{1}{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2^T)\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 - \frac{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2}\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 = 0$$

(ii) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ och $\boldsymbol{v}$ är linjärt beroende eftersom $\boldsymbol{v}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{a}_1$ och $\boldsymbol{a}_2$

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{I} - \frac{1}{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2^T)\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1 - \frac{1}{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1 - \frac{\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2}\boldsymbol{a}_2$$

---

3 (a) Låt $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning. Hur många rader och kolumner har avbildningsmatrisen. Är avbildningen bijektiv? (2p)

(b) Låt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vara en avbildningsmatris till en linjär avbildning. (3p)
Beskriv avbildningen geometriskt (rita tex. en figur och förklara).

(c) Bestäm egenvärden och egenvektorer till avbildningsmatrisen $\boldsymbol{A}$ ovan. (4p)

(a) 2 rader och 5 kolumner. Nej avbildningen är inte bijektiv, avbildningsmatrisen går inte att invertera.

(b) Avbildningen speglar punkter i $\mathbb{R}^3$ genom planet $x_2 = 0$

(c) Egenvärden:

$$0 = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

dvs. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$

Egenvektorer:

$\lambda = -1$

$$(\boldsymbol{A} - (-1)\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = t \\ v_3 = 0 \end{cases} \text{där } t \neq 0 \in \mathbb{R}$$

$\lambda = 1$

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = s \\ v_2 = 0 \\ v_3 = t \end{cases} \text{där } s \neq 0, t \neq 0 \in \mathbb{R}$$

---

4 Låt $l_1 = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ och $l_2 = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases}$ vara två linjer.

(a) Skär linjerna varandra? Är de parallella? (Motivera ditt svar). (3p)

(b) Bestäm ekvationen för det plan som går genom linjen l_1 och är parallell med linjen l_2. (5p)

(c) Beräkna ortogonala projektioner av $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ på planet du bestämt i (b)-uppgiften. (3p)

(a) De skär inte varandra, de är inte parallella

(b) Normalvektor $\boldsymbol{n}$ till planet ska vara ortogonal mot både l_1 och l_2,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vi får planet $\pi : 2x - 2z = d$. Punkt $P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på planet ger $d = 2$. Planets ekvation blir $2x - 2z = 2$

(c) $\boldsymbol{P}_{1_{proj}} = \boldsymbol{P}_1 + \alpha \boldsymbol{n}$, där $\alpha = \dfrac{d - \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}}$

$$\boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 0, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 8 \text{ och } \alpha = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

dvs

$$\boldsymbol{P}_{1_{proj}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{P}_2$ ligger redan på planet, så projektionen blir $\boldsymbol{P}_2$.

---

5 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Avgör om någon av $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ respektive $\boldsymbol{AB}$ är inverterbara. Om så bestäm inversen. (5p)

(b) Låt $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ vara två $n \times n$ matriser. Och antag att $\boldsymbol{AB}$ är inverterbar. Visa att i så fall är $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ inverterbara. (4p)

(a) $\boldsymbol{A}$ är inte inverterbar, kolumnerna är linjärt beroende. $\boldsymbol{B}$ är inverterbar med inversen $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, produkten $\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 13 \\ -1 & 4 & 13 \\ -1 & 4 & 13 \end{bmatrix}$ är inte inverterbar.

(b) Om $\boldsymbol{AB}$ inverterbar är $0 \neq \det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$, dvs. $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0, \det(\boldsymbol{B}) \neq 0$, dvs. $\boldsymbol{B}$ inverterbar.

Lycka till !