Tentamen
TMV211 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2022-01-04 kl. 08.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475, +353-21-4292548

Hjälpmedel: Inga

För godkänt på tentan krävs 30 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från bonusuppgifterna under HT-2021. Preliminärt så krävs 40 poäng för betyget 4 och 50 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens Canvassida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 26 Januari. Granskning ordnas därefter av kursansvarig.

OBS! Motivera alla dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Om du i en lösning åberopar en sats från kursboken eller föreläsningarna så räcker det att du formulerar satsen tydligt, du behöver *inte* inkludera ett bevis av satsen.

I uppgift 4 behöver du inte räkna ut svaren som bas-10 tal.

Uppgifterna

1. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (8p)

$$107x - 38y = 10$$

samt den lösning för vilken $|x| + |y|$ är minimal.

(b) Bestäm den allmänna lösningen till följande system av kongruenser: (4p)

$$38x \equiv 1 \pmod{107} \quad x \equiv 2 \pmod{3}.$$

2. Bestäm $5^{2162} \pmod{4158}$. (6p)

Var god vänd!

3. Bevisa med hjälp av induktion att för alla heltal $n \geq 2$ gäller (7p)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \leq \frac{5}{6} - \frac{1}{n+2}.$$

(Obs! Du får *inga* poäng om du bevisar olikheten på något annat vis, även om ditt bevis är korrekt. Uppgiften ska testa om du kan matematisk induktion.)

4. Betrakta bokstäverna i (10p)

DISKRETMATEMATIK

(a) Hur många *ord* kan man göra av bokstäverna om alla bokstäverna ska användas ?

(b) Hur många 5-bokstävers ord kan man göra som innehåller all tre T:n och i övrigt bara vokaler ?

(c) Om man plockar 3 av de 16 bokstäverna slumpmässigt, vad är sannolikheten att man plockar 3 konsonanter ?

(d) I hur många av orden i del (a) förekommer *inte* samma vokal i två intilligande platser ?

(e) Säg att du hade oändligt många exemplar av varje bokstav som förekommer ovan, dvs D, I, S, K, R, E, T, M, A. På hur många sätt kan du välja 13 bokstäver, utan hänsyn till ordningen ?

Obs! I deluppgifter (a)-(d) ett *ord* betecknar en valfri *ordnad* bokstavskombination. Dvs ordet behöver inte betyda något på t.ex. svenska.

5. (a) Kom ihåg att en sekvens av positiva heltal sägs vara *grafisk* om det finns en enkel graf med dessa gradtal. Betrakta följande tre sekvenser: (5p)

2,2,3,3,4,4,5
2,3,3,3,4,4,5
1,2,3,4,4,6,6

i. Två av dessa sekvenser är inte grafiska. Vilka två ? Motivera ditt svar !

ii. För den grafiska sekvensen, rita en graf som har dessa gradtal.

(b) Låt G vara den viktade grafen i Figur 1 och låt G^* vara den underliggande oviktade grafen, dvs samma noder och kanter men inga vikter på kanterna.

i. Ange en Eulerväg i G^*. (2p)

ii. Använd antingen Kruskals eller Prims algoritm för att skapa ett MST i G. Skriv tydligt hur din algoritm fortskrider, dvs vilken kant som väljs i varje steg. Rita det slutgiltiga MST:et och ange dess totala vikt. (3p)

Var god vänd!

6. Skriv följande argument i symbolisk logisk form. Ange *tydligt* ditt universum och dina predikat. Är argumetet giltigt ? (5p)

Alla som har pluggat på Chalmers är smarta
Några som har pluggat på KTH är korkade
– –
Det finns ingen som har pluggat på både Chalmers och KTH

OBS! I denna uppgift ska "korkad" betraktas som synonymt med "inte smart".

7. Låt $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ges av $f(x, y) = x^2 - y^2$. (5p)

(a) Är f injektiv ? Förklara.

(b) Är f surjektiv ? Förklara.

8. Betrakta relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$(a, b)\ \mathcal{R}\ (c, d) \ \Leftrightarrow\ \max\{|a|, |b|\} = \max\{|c|, |d|\}.$$

(a) Motivera varför $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på $\mathbb{R}^2$. Du kan fatta dig kort men lämna inte ut någon egenskap som en ekvivalensrelation ska ha ! (2.5p)

(b) Rita i planet ekvivalensklassen som innehåller (1, 1). (2.5p)

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar TMV211, 2022-01-04

1. (a) Euklides framåt:

$$\begin{aligned}107 &= 2\cdot 38+31,\\ 38 &= 1\cdot 31+7,\\ 31 &= 4\cdot 7+3,\\ 7 &= 2\cdot 3+1.\end{aligned}$$

Sedan bakåt:

$$\begin{aligned}1 &= 7-2\cdot 3 = 7-2(31-4\cdot 7) = 9\cdot 7-2\cdot 31\\ &= 9(38-31)-2\cdot 31 = 9\cdot 38-11\cdot 31 = 9\cdot 38-11(107-2\cdot 38) = (-11)\cdot 107+31\cdot 38,\end{aligned}$$

alltså

$$1 = (-11)\cdot 107-(-31)\cdot 38. \tag{1}$$

Multiplicera igenom med 10 så får vi att

$$10 = (-110)\cdot 107-(-310)\cdot 38,$$

dvs $x_0 = -110$, $y_0 = -310$ är en lösning. Den allmänna lösningen lyder

$$\begin{aligned}x &= x_0+\left(\frac{b}{d}\right)n = -110+38n,\\ y &= y_0+\left(\frac{a}{d}\right)n = -310+107n, \quad n\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Det är lätt att se att $|x|+|y|$ blir minimal då $n=3$, vilket ger lösningen $x=4$, $y=11$.

(b) Från (1) ser vi att den första kongruensen kan skrivas som $x\equiv 31 \pmod{107}$. Den Kinesiska Restsatsen säger att systemet har en unik lösning modulo $107\cdot 3 = 321$. Dessutom måste denna lösning vara ett av 31, $31+107 = 138$ eller $138+107 = 245$. Man kontrollerar att bland dessa tre tal är det endast 245 som är 2 (mod 3).

Svar: $x\equiv 245 \pmod{321}$.

2. Först måste vi primtalsfaktorisera 4158:

2	4158
3	2079
3	693
3	231
7	77
11	11
	1

Alltså:

$$\begin{aligned} 4158 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \Rightarrow \phi(4158) &= \phi(2) \cdot \phi(3^3) \cdot \phi(7) \cdot \phi(11) \\ = (2-1) \cdot (3^3 - 3^2) \cdot (7-1) \cdot (11-1) &= 1 \cdot 18 \cdot 6 \cdot 10 = 1080. \end{aligned}$$

Vi ser också från primtalsfaktoriseringen att SGD(5, 4158) = 1, så Eulers sats gäller och medför att

$$5^{1080} \equiv 1 \pmod{4158}.$$

Således har vi att

$$5^{2162} = (5^{1080})^2 \cdot 5^2 \equiv 5^2 \equiv 25 \pmod{4158}.$$

3. BASFALLET $n = 2$:

$$VL: \quad \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \cdots = \frac{7}{12},$$

$$HL: \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Så VL $\leq$ HL, ja.

INDUKTIONSSTEGET: Antag, för ett visst $n \geq 2$, att

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \leq \frac{5}{6} - \frac{1}{n+2}. \tag{2}$$

Vi vill härleda att

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \leq \frac{5}{6} - \frac{1}{n+3}. \tag{3}$$

Vi jobbar på VL av (3):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) \\ &\overset{(2)}{\leq} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right). \end{aligned}$$

Så för att härleda (3), det räcker att kunna visa att

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) &\leq \frac{5}{6} - \frac{1}{n+3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} &\leq \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} &\leq \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \Leftrightarrow (2n+1)(2n+2) &\geq (n+2)(n+3) \\ \Leftrightarrow 4n^2 + 6n + 2 &\geq n^2 + 5n + 6 \\ \Leftrightarrow 3n^2 + n &\geq 4, \end{aligned}$$

vilket är uppenbarligen sann för alla $n \geq 2$ (den är även sann för $n = 1$).

4. (a) Det finns 16 bokstäver totalt, varav 3 st T och 2 st K, M, A, E, I. Så enligt multinomialsatsen kan man göra $\frac{16!}{3!\,(2!)^5}$ ord.

(b) Det finns $\binom{5}{3} = 10$ val för positionerna av T:en. Inbördesordning av de två övriga bokstäverna spelar roll endast om de är olika. Det finns 3 sätt att välja samma bokstav i övrigt (A, E, I) och 6 sätt att välja två olika med hänsyn till inbördesordning (AE, EA, AI, IA, EI, IE).

Så enligt MP+AP finns det $10 \cdot (3 + 6) = 90$ olika ord.

(c) 10 av de 16 bokstäverna är konsonanter. Sannolikheten att man först plockar en konsonant är således $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$. Då har man 15 bokstäver kvar av vilka 9 är konsonanter, så sannolikheten att den andra bokstaven också är en konsonant är $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. På samma sätt, sannolikheten att den 3e boksataven också är en konsonant är $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$. Enligt (den sannolikhetsteoretiska) MP, sannolikheten att alla tre bokstäver är konsonanter är således $\frac{5}{8} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3}{14}$.

(d) Vi tillämpar sållprincipen. Låt $\mathcal{X}$ vara mängden av alla orden i del (a) och låt $\mathcal{A}, \mathcal{E}$ resp. $\mathcal{I}$ vara delmängderna till $\mathcal{X}$ bestående av de ord som innehåller intilligande A, E resp. I. Vi söker

$$|\mathcal{X} - (\mathcal{A} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{I})| = |\mathcal{X}| - |\mathcal{A} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{I}| = \frac{16!}{3!\,(2!)^5} - |\mathcal{A} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{I}|. \tag{4}$$

Enligt sållprincipen har vi

$$\begin{aligned} |\mathcal{A} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{I}| &= |\mathcal{A}| + |\mathcal{E}| + |\mathcal{I}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{E}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{I}| - |\mathcal{E} \cap \mathcal{I}| + |\mathcal{A} \cap \mathcal{E} \cap \mathcal{I}| \qquad (5) \\ &\overset{\text{symmetri}}{=} 3|\mathcal{A}| - 3|\mathcal{A} \cap \mathcal{E}| + |\mathcal{A} \cap \mathcal{E} \cap \mathcal{I}|. \end{aligned}$$

Först betrakta $\mathcal{A}$. Vi kan betrakta de två intilligande A:en som en enda bokstav AA. Således har vi 15 bokstäver, varav 3 T och 2 K, M, E, I. Så antalet ord är nu $\frac{15!}{3!\,(2!)^4}$.

Näst betrakta $\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$. Vi räknar orden som innehåller både AA och EE. Således har vi 14 bokstäver, varav 3 T och 2 K, M, I. Så antalet ord är nu $\frac{14!}{3!\,(2!)^3}$.

Slutligen betrakta $\mathcal{A} \cap \mathcal{E} \cap \mathcal{I}$. Vi räknar orden som innehåller AA, EE och II. Således har vi 13 bokstäver, varav 3 T och 2 K, M. Så antalet ord är nu $\frac{13!}{3!\,(2!)^2}$.

Insättning in i (5) och sedan i (4) ger svaret på uppgiften:

$$\frac{16!}{3!\,(2!)^5} - \frac{3 \times 15!}{3!\,(2!)^4} + \frac{3 \times 14!}{3!\,(2!)^3} - \frac{13!}{3!\,(2!)^2}.$$

(e) Det finns 9 olika “sorters” bokstäver och du ska välja 13 st utan hänsyn till ordning. Det enda som spelar roll år således hur många gånger du väljer varje “sorts” bokstav. Enligt formel, antalet sätt att välja är $\binom{13+9-1}{9-1} = \binom{21}{8}$.

5. (a) Den första sekvensen är inte grafisk ty summan av gradtalen är udda. Den tredje är inte grafisk heller, ty: en sådan graf skulle ha 7 noder varav 2 st har grad 6. Varje övrig nod skulle således vara en granne till båda dessa, dvs varje nod skulle ha gradtal minst 2, vilket säger emot att det finns en nod av grad 1.

Den andra sekvensen är grafisk, se Figur L.5.

(b) i. Det finns två noder av udda gradtal, b och i. Ett exempel på en Eulerväg dem emellan är

$$b \to c \to a \to b \to f \to e \to d \to a \to h \to d \to f$$
$$\to h \to i \to f \to g \to c \to j \to l \to k \to i \to j \to g \to i.$$

ii. Om vi använder Prims algoritm med start i a, säg, så kan det gå till såhär (notera att kanten $\{i,\, h\}$ skulle kunna väljas i stället i Steg 9):

Steg	Vald kant	Vikt
1	$\{a,\, c\}$	3
2	$\{c,\, j\}$	1
3	$\{c,\, b\}$	2
4	$\{j,\, g\}$	2
5	$\{j,\, l\}$	3
6	$\{g,\, i\}$	3
7	$\{i,\, f\}$	2
8	$\{f,\, d\}$	2
9	$\{d,\, h\}$	3
10	$\{l,\, k\}$	4
	Total vikt	25

Om man däremot använder Kruskals algoritm så skulle det kunna gå till såhär (här skulle likväl $\{h,\, i\}$ kunna väljas i något av Stegen 6-9):

Steg	Vald kant	Vikt
1	$\{c,\, j\}$	1
2	$\{b,\, c\}$	2
3	$\{g,\, j\}$	2
4	$\{d,\, f\}$	2
5	$\{f,\, i\}$	2
6	$\{a,\, c\}$	3
7	$\{d,\, h\}$	3
8	$\{g,\, i\}$	3
9	$\{j,\, l\}$	3
10	$\{k,\, l\}$	4
	Total vikt	25

6. Låt universumet U bestå av alla människor och vi inför följande predikat:

$C(x)$: x har pluggat på CTH.

$K(x)$: x har pluggat på KTH.

$S(x)$: x är smart.

Argumentet kan då skrivas som

$$\begin{array}{r} \forall x: \ C(x) \Rightarrow S(x) \\ \exists x: \ K(x) \wedge \neg S(x) \\ \hline \neg \exists x : C(x) \wedge K(x) \end{array}$$

Argumentet är ogiltigt ty hypoteserna utesluter inte (den visserligen osannolika händelsen !) att det också finns smarta människor som har pluggat på KTH.

7. (a) Nej, den är inte injektiv. T.ex. $f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$.

(b) Nej, den är inte surjektiv. T.ex. jag påstår att det inte finns några x, y sådana att $f(x, y) = 2$. För $x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 2$. Både $x-y$ och $x+y$ är heltal och 2 är ett primtal så vi måste ha $x - y = \pm 1$ och $x + y = \pm 2$, eller vice versa. Men ± 1 är udda och ± 2 är jämna, medan $x - y$ och $x + y = (x - y) + 2y$ har alltid samma paritet.

8. (a) Alla följande påståenden är uppenbara, ingen ytterligare motivering behövs.

Reflexivitet: $\max\{|a|, |b|\} = \max\{|a|, |b|\}$.

Symmetri:

$$[\max\{|a|, |b|\} = \max\{|c|, |d|\}] \Rightarrow [\max\{|c|, |d|\} = \max\{|a|, |b|\}].$$

Transitivitet:

$$\begin{aligned} [\max\{|a|, |b|\} = \max\{|c|, |d|\}] \ \wedge \ [\max\{|c|, |d|\} = \max\{|e|, |f|\}] \\ \Rightarrow \ \max\{|a|, |b|\} = \max\{|e|, |f|\}. \end{aligned}$$

(b) Se Figur L.8.