Tentamen
TMV211 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2021-10-23 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475, 031-7725371

Hjälpmedel: Inga

För godkänt på tentan krävs 30 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från bonusuppgifterna under HT-2021. Preliminärt så krävs 40 poäng för betyget 4 och 50 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens Canvassida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 12 November. Granskning ordnas därefter av kursansvarig.

OBS! Motivera alla dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Om du i en lösning åberopar en sats från kursboken eller föreläsningarna så räcker det att du formulerar satsen tydligt, du behöver *inte* inkludera ett bevis av satsen.

Uppgifterna

1. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (11p)

$$336x - 47y = 100$$

(b) Beräkna $\phi(336)$.

(c) Bestäm $47^{479} \pmod{336}$.

2. Bestäm den allmänna lösningen till följande system av kongruenser: (7p)

$$x \equiv 2 \pmod 3, \quad 2x \equiv 3 \pmod{11}, \quad x \equiv 4 \pmod{17}.$$

Var god vänd!

3. Talföljden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt enligt (7p)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \qquad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 1 \;\; \forall\, n \geq 2.$$

(a) Beräkna a_2, a_3.

(b) Bevisa med hjälp av induktion att $a_n = 2^{n+1} - (n+1)$, för varje $n \in \mathbb{N}$.

(Obs! Du får *inga* poäng om du bevisar likheten på något annat vis, även om ditt bevis är korrekt. Uppgiften ska testa om du kan matematisk induktion.)

4. Småstaden Woodpecker Creek har 100 friska vuxna invånare, varav 50 st har blodgrupp O och 10 st har var och en av blodgrupperna A+, A-, B+, B-, AB. (8p)

I lördags arrangerade den lokala kliniken en "blood drive" där alla friska vuxna bjöds in för att donera blod.

(a) Hur många möjligheter finns det för den *ordnade* sekvensen av de 5 blodgrupperna hos de 5 första som dök upp för att donera blod ?

(b) Hur många möjligheter finns det för ett *facit* efter 5 donatorer, där ett facit innehåller *bara antalet* donatorer i varje blodgrupp ?

(c) Hur många möjligheter finns det för *identiteterna* hos de 5 första donatorerna, *i ordning*, om vi vet att de hade 5 olika blodgrupper ?

(d) Vad är sannolikheten att bland de 5 första donatorera finns minst 3 med blodgrupp O ?

Obs! I deluppgifter (a) och (b) är man *inte* intresserad av *vem* som donerar blod, bara deras blodgrupper.

5. (a) Är de två graferna i Figur 1 isomorfa eller ej ? Förklara tydligt ! (3p)

(b) Låt G vara den viktade grafen i Figur 2 och låt G^* vara den underliggande oviktade grafen, dvs samma noder och kanter men inga vikter på kanterna.

i. Ange en Hamiltoncykel och en Eulerväg i G^*. (4p)

ii. Använd antingen Kruskals eller Prims algoritm för att skapa ett MST i G. Skriv tydligt hur din algoritm fortskrider, dvs vilken kant som väljs i varje steg. Rita det slutgiltiga MST:et och ange dess totala vikt. (3p)

6. Avgör om följande argument är giltigt eller ej. Motivera väl ! (4p)

$$\begin{array}{r}
\neg p \to q \\
\neg q \\
r \vee s \\
\neg r \\
(p \wedge s) \to t \\
\hline
t
\end{array}$$

Var god vänd!

7. Låt $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ges av $f(x, y) = 3x - 2y$. (4p)

(a) Är f injektiv ? Förklara.

(b) Är f surjektiv ? Förklara.

8. Betrakta följande binär operation på $\mathbb{R}$:

$$a * b = a + b + \sqrt[3]{ab}.$$

(a) i. Är $*$ kommutativ ? Förklara. (2p)

ii. Är $*$ associativ ? Förklara. (2p)

iii. Finns det en identitet för $*$? Förklara. (2p)

(b) Har 1 en invers ? Förklara. (Obs! Du behöver inte beräkna exakt en eventuell invers). (3p)

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar TMV211, 21-10-23

1. (a) Euklides framåt:

$$\begin{aligned}
&336 = 7 \cdot 47 + 7,\\
&47 = 6 \cdot 7 + 5,\\
&7 = 1 \cdot 5 + 2,\\
&5 = 2 \cdot 2 + 1.
\end{aligned}$$

Sedan bakåt:

$$\begin{aligned}
&1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7\\
&= 3(47 - 6 \cdot 7) - 2 \cdot 7 = 3 \cdot 47 - 20 \cdot 7 = 3 \cdot 47 - 20(336 - 7 \cdot 47),
\end{aligned}$$

alltså

$$1 = (-20) \cdot 336 - (-143) \cdot 47. \tag{1}$$

Multiplicera igenom med 100 så får vi att

$$100 = (-2000) \cdot 336 - (-14300) \cdot 47,$$

dvs $x_0 = -2000$, $y_0 = -14300$ är en lösning. Den allmänna lösningen lyder

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n = -2000 + 47n,$$

$$y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) n = -14300 + 336n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Först måste vi primtalsfaktorisera:

2	336
2	168
2	84
2	42
3	21
7	7
	1

Alltså:

$$\begin{aligned}
336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 &\Rightarrow \phi(336) = \phi(2^4) \cdot \phi(3) \cdot \phi(7)\\
&= (2^4 - 2^3) \cdot (3 - 1) \cdot (7 - 1) = 8 \cdot 2 \cdot 6 = 96.
\end{aligned}$$

(c) Vi ser från primtalsfaktoriseringen (eller från (1)) att SGD(47, 336) = 1, så Eulers sats gäller och medför att

$$47^{96} \equiv 1 \pmod{336}.$$

Således har vi att

$$47^{479} = (47^{96})^5 \cdot 47^{-1} \equiv 47^{-1} \pmod{336}.$$

Ekv. (1) medför att $143 \cdot 47 \equiv 1 \Rightarrow 47^{-1} \equiv 143 \pmod{336}$.

2. Först skriver vi om den andra kongruensen till

$$x \equiv 2^{-1} \cdot 3 \equiv 6 \cdot 3 = 18 \equiv 7 \pmod{11}.$$

Systemets allmänna lösning är alltså

$$x \equiv 2 \cdot b_1 \cdot 11 \cdot 17 + 7 \cdot b_2 \cdot 3 \cdot 17 + 4 \cdot b_3 \cdot 3 \cdot 11 \pmod{3 \cdot 11 \cdot 17}, \tag{2}$$

där

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv (11 \cdot 17)^{-1} \equiv (2 \cdot 2)^{-1} \equiv 1^{-1} \equiv 1 \pmod{3} \;\Rightarrow\; \text{tag } b_1 = 1, \\ b_2 &\equiv (3 \cdot 17)^{-1} \equiv (3 \cdot 6)^{-1} \equiv 7^{-1} \equiv -3 \pmod{11} \;\Rightarrow\; \text{tag } b_2 = -3, \\ b_1 &\equiv (3 \cdot 11)^{-1} \equiv (-1)^{-1} \equiv -1 \pmod{17} \;\Rightarrow\; \text{tag } b_3 = -1. \end{aligned}$$

Insättning in i (2) ger

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 17 - 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 11 \pmod{561} \\ &\equiv 374 - 1071 - 132 \equiv -829 \equiv -829 + 2 \cdot 561 \equiv 293 \pmod{561}. \end{aligned}$$

Svar: $x \equiv 293 \pmod{561}$.

3. (a)

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 - 2a_0 + 1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 1 = 5, \\ a_3 &= 3a_2 - 2a_1 + 1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 1 = 12. \end{aligned}$$

(b) Basfallen $n = 0, 1$:

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad 2^{0+1} - (0+1) = 2 - 1 = 1 = a_0, \text{ ja.} \\ n = 1: &\quad 2^{1+1} - (1+1) = 4 - 2 = 2 = a_1, \text{ ja.} \end{aligned}$$

Induktionssteget: Antag, för ett visst $n \geq 1$, att formeln gäller för både n och $n-1$, dvs att båda följande gäller:

$$a_n = 2^{n+1} - (n+1), \tag{3}$$

$$a_{n-1} = 2^n - n. \tag{4}$$

Vi vill härleda att

$$a_{n+1} = 2^{n+2} - (n+2).$$

Enligt rekursionsformeln har vi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n - 2a_{n-1} + 1 \overset{(3),(4)}{=} 3[2^{n+1} - (n+1)] - 2[2^n - n] + 1 \\ &= 2^n(3 \cdot 2 - 2) + (-3n - 3 + 2n + 1) = 2^n \cdot 4 + (-n - 2) = 2^{n+2} - (n+2), \quad \text{v.s.v.} \end{aligned}$$

4. (a) Det finns 6 möjliga blodgrupper per person och 5 personer så enligt MP finns det 6^5 möjliga sekvenser.

(b) Kalla blodgrupperna för 1, 2, ..., 6 i valfri ordning och låt x_i vara antalet personer bland de 5 första donatorerna som har blodgrupp i. Ett facit är en lösning till ekvationen $\sum_{i=1}^{6} x_i = 5$, $x_i \in \mathbb{N}$. Enligt formel är antalet lösningar $\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5}$.

(c) Först skiljer vi mellan två fall:

Fall 1: En av personerna hade blodgrupp O. Det finns $\binom{5}{4} = 5$ val av de övriga representerade blodgrupperna, sedan 5! sätt att ordna de 5 representerade blodgrupperna. Givet detta finns det 50 val för personen med blodgrupp O och 10 val för var och en av de övriga personerna. Enligt MP finns det därmed $5 \cdot 5! \cdot 50 \cdot 10^4$ val av identiteterna i ordning i Fall 1.

Fall 2: Ingen bland de fem första hade blodgrupp O. I så fall finns det bara ett sätt att välja blodgrupperna, 5! sätt att ordna dem och 10 val för varje person. Så enligt MP finns det $5! \cdot 10^5$ val för identiterna i ordning i Fall 2.

Slutligen, enligt AP är det totala antalet möjligheter

$$5 \cdot 5! \cdot 50 \cdot 10^4 + 5! \cdot 10^5 = 260 \cdot 120 \cdot 10000.$$

(d) Enklaste sättet att lösa denna uppgift är att konstatera att, eftersom exakt hälften av invånarna har blodgrupp O, så måste det vara lika sannolikt att majoriteten bland de fem första har blodgrupp O som att minoriteten har det. Därför är sannolikheten att minst 3 av de 5 första har blodgrupp O exakt 1/2.

Om man inte inser detta kan man i stället resonera "enligt mall": Sannolikheten ifråga är X/Y, där

$X =$ antalet sätt att välja 5 invånare så att minst 3 har blodgrupp O,
$Y =$ det totala antalet sätt att välja 5 invånare.

Notera att det spelar ingen roll för kvotet X/Y huruvida vi tar hänsyn till ordning i valet av de 5 personerna så länge vi är konsekventa för både X och Y. Så vi antar att ordning ej spelar roll.

Då är $Y = \binom{100}{5}$ helt enkelt och för X finns det tre fall:

Fall 1: 3 st O och 2 andra. Vi väljer 3 av de 50 O:n och 2 av de 50 övriga $\Rightarrow \binom{50}{3} \cdot \binom{50}{2}$ möjligheter.
Fall 2: 4 st O och 1 andra. Vi väljer 4 av de 50 O:n och 1 av de 50 övriga $\Rightarrow \binom{50}{4} \cdot \binom{50}{1}$ möjligheter.
Fall 3: 5 st O och inga andra. Vi väljer 5 av de 50 O:n så $\binom{50}{5}$ möjligheter.

Slutligen får vi då enligt AP att sannolikheten ifråga blir

$$\frac{\binom{50}{3} \cdot \binom{50}{2} + \binom{50}{4} \cdot \binom{50}{1} + \binom{50}{5}}{\binom{100}{5}}.$$

Det blir en (frivillig) räkneupgift att kontrollera att detta är lika med 1/2.

5. (a) Nej de är inte isomorfa. T.ex. den första grafen har exakt en K_3, som utgörs av de tre inre noderna. Den andra grafen har dock två st K_3:or, som utgörs av den övre vänstra och nedre högre ytternoderna tillsammans med en av de andra två ytternoderna.

(b) i. Ett exempel på en Hamiltoncykel är

$$a \to b \to c \to g \to k \to j \to f \to e \to i \to h \to d \to a.$$

Det finns två noder av udda grad, e och h. Ett exempel på en Eulerväg dem emellan är

$$e \to d \to a \to b \to d \to h \to e \to b \to c \to g \to b$$
$$\to f \to e \to i \to f \to j \to g \to k \to j \to i \to h.$$

ii. Om vi använder Prims algoritm med start i a, säg, så kan det gå till såhär:

Steg	Vald kant	Vikt
1	$\{a, d\}$	6
2	$\{d, b\}$	2
3	$\{b, c\}$	1
4	$\{b, f\}$	3
5	$\{f, e\}$	2
6	$\{f, i\}$	2
7	$\{i, h\}$	3
8	$\{f, j\}$	4
9	$\{j, g\}$	5
10	$\{j, k\}$	7
	Total vikt	35

Om man däremot använder Kruskals algoritm så skulle det kunna gå till såhär:

Steg	Vald kant	Vikt
1	$\{b, c\}$	1
2	$\{b, d\}$	2
3	$\{e, f\}$	2
4	$\{f, i\}$	2
5	$\{b, f\}$	3
6	$\{h, i\}$	3
7	$\{f, j\}$	4
8	$\{g, j\}$	5
9	$\{a, d\}$	6
10	$\{j, k\}$	7
	Total vikt	35

6. Argumentet är giltigt. Vi för ett mosägelsebevis. Antag att slutsatsen är falsk men alla hypoteserna sanna. Slutsats falsk medför $t = 0$. H2 sann medför $q = 0$. För att H1 ska vara sann måste då $p = 1$. H4 sann medför $r = 0$ och för att H3 ska vara sann måste då $s = 1$. Men nu har vi $p = s = 1 \Rightarrow p \wedge s = 1$, och $t = 0$, så H5 är falsk, en motsägelse.

7. (a) Nej, den är inte injektiv. T.ex. $f(1, 1) = f(3, 4) = 1$.

(b) Ja, den är surjektiv. Givet $n \in \mathbb{Z}$ så har vi t.ex. att $f(n, n) = 3n - 2n = n$.

8. (a) Ja.

$$a * b = a + b + \sqrt[3]{ab} = b + a + \sqrt[3]{ba} = b * a.$$

(b) Nej. T.ex.

$$\begin{aligned}(1 * 1) * 2 &= (1 + 1 + \sqrt[3]{1 \cdot 1}) * 2 \\ &= 3 * 2 = 3 + 2 + \sqrt[3]{3 \cdot 2} = 5 + \sqrt[3]{6},\end{aligned}$$

medan

$$\begin{aligned}1 * (1 * 2) &= 1 * (1 + 2 + \sqrt[3]{1 \cdot 2}) \\ &= 1 * (3 + \sqrt[3]{2}) = 1 + 3 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{1 \cdot (3 + \sqrt[3]{2})} = 4 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{2}}.\end{aligned}$$

Sedan kan man lätt kontrollera att

$$5 + \sqrt[3]{6} \neq 4 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{2}}.$$

(c) Ja, 0 är en identitet ty för varje $a \in \mathbb{R}$ gäller

$$a * 0 = 0 * a = a + 0 + \sqrt[3]{a \cdot 0} = a + 0 + 0 = a.$$

(d) Ja. En invers ξ till 1 ska uppfylla

$$1 * \xi = 0 \Leftrightarrow 1 + \xi + \sqrt[3]{\xi} = 0 \Leftrightarrow \xi + \sqrt[3]{\xi} = -1.$$

Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet av $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$. Funktionen f är uppenbarligen kontinuerlig (dvs dess graf är en kontinuerlig kurva) och $f(0) = 0$, $f(-1) = -2$. Därmed kommer det att finnas ett $\xi \in (-1, 0)$ sådant att $f(\xi) = -1$.