Tentamen
TMV211 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2021-08-27 kl. 14.00–18.00 (14.00 - 20.00 för dem med förlängd tid) + 30 minuter för scanning

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475, 031-7725371

För godkänt på tentan krävs 30 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från inlämningsuppgifterna under HT-2020. Preliminärt så krävs 40 poäng för betyget 4 och 50 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens Canvassida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms i Canvas Speed Grader. Resultatet meddelas i Ladok senast den 17 September. Online granskning ordnas därefter av kursansvrig (mig).

OBS! Externa **hjälpmedel** är tillåtna men alla stegen i dina resonemang och beräkningar måste motiveras väl i skrift. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Om du i en lösning åberopar en sats från kursboken så behöver du *inte* inkludera ett bevis av satsen.

Uppgifterna

1. (a) För vilka $b \in \mathbb{Z}$ har den Diofantiska ekvationen (1p)

$$47x + by = 600$$

minst en lösning ?

(b) Sätt $b = 11$ och ta fram ekvationens allmänna lösning, samt alla lösningar där både $x \geq 0$ och $y \geq 0$. (7p)

2. (a) Bestäm $\phi(2520)$. (3p)

(b) Bestäm $11^{1151} \pmod{2520}$. (5p)

Var god vänd!

3. Bevisa med hjälp av induktion att (8p)

$$\forall\, n \geq 1: \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

TIPS: Du får använda, utan bevis, följande egenskap hos den naturliga logaritmen:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ : \ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$$

(OBS! Du får noll poäng om du bevisar olikheten på något annat vis, även om ditt bevis är korrekt. Uppgiften ska testa om du kan matematisk induktion.)

4. (a) För grafen G_1 i Figur 4,

i. Ange en Hamiltoncykel (2p)

ii. Lägg till en kant mellan två hittills okopplade noder så att den resulterande grafen har en Eulerväg. Ange sedan en sådan väg i din utökade graf. (3p)

(b) Är G_1 isomorf med grafen G_2 ? Förklara ! (3p)

5. På ett fiktivt OS finns det bara två grenar, så att totalt 6 medaljer delas ut, och 6 deltagande länder. Vi är intresserade av medaljfördelningen, där vi bryr oss endast om vilka länder som vinner medaljer, inte de specifika utövarna i fall ett land har flera deltagare i samma gren. Vi skiljer mellan två nivåer av detalj:

Den grova fördelningen (GF): Vi presenterar bara antalet medaljer per land, inte deras valörer eller i vilka grenar de bärgades.

Den fina fördelningen (FF): Vi presenterar vilka länder som vann guld, silver och brons i varje gren.

(a) Hur många möjligheter finns det för FF om (6p)

i. varje land har tre deltagare i varje gren så att ett land kan vinna flera medaljer i samma gren ?

ii. varje land har bara en deltagare per gren ?

iii. vi vet att varje land vann (exakt) en medalj ?

(b) Hur många möjligheter finns det för GF (4p)

i. under samma villkor som i. ovan ?

ii. under samma villkor som ii. ovan, vilket innebär att ett land kan vinna högst 2 medaljer totalt ?

Var god vänd!

6. Låt universumet U bestå av alla delmängderna till $\mathbb{Z}$ som är ändliga och innehåller ett jämnt antal element, dvs (8p)

$$U = \{A \subseteq \mathbb{Z} : |A| < \infty \text{ och } |A| \text{ är jämnt}\}.$$

Betrakta relationen $\mathcal{R}$ på U som definieras enligt

$$A \mathcal{R} B \quad \Leftrightarrow \quad |A \backslash B| \text{ är jämnt.}$$

(a) Är $\mathcal{R}$ reflexiv ? Förklara.

(b) Är $\mathcal{R}$ symmetrisk ? Förklara.

(c) Är $\mathcal{R}$ anti-symmetrisk ? Förklara.

(d) Är $\mathcal{R}$ transitiv ? Förklara.

7. Betrakta följande binär operation på $\mathbb{R}$:

$$x * y = 1 + x + y - xy.$$

(a) i. Är $*$ kommutativ ? Förklara. (2p)

ii. Är $*$ associativ ? Förklara. (2p)

iii. Finns det en identitet för $*$? Förklara. (2p)

(b) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller (4p)

$$((-2) * x) * x = 0.$$

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Diskret Matematik D1/DI2, 210827

1. (a) SGD(47, b) måste dela 600. Eftersom 47 är ett primtal och 600 inte är en multipel av 47, medför det att ekvationen är lösbar om och endast om b inte heller är en multipel av 47.

(b) Euklides framåt:

$$\begin{aligned}
&47 = 4 \cdot 11 + 3,\\
&11 = 3 \cdot 3 + 2,\\
&3 = 1 \cdot 2 + 1.
\end{aligned}$$

Sedan bakåt:

$$\begin{aligned}
&1 = 3 - 2 = 3 - (11 - 3 \cdot 3)\\
&= 4 \cdot 3 - 11 = 4(47 - 4 \cdot 11) - 11 = 47(4) + 11(-17).
\end{aligned}$$

Multiplicera igenom med 600 så får vi att

$$600 = 47(2400) + 11(-10200),$$

dvs $x_0 = 2400$, $y_0 = -10200$ är en lösning. Den allmänna lösningen lyder

$$x = x_0 - \left(\frac{b}{d}\right) n = 2400 - 11n,$$

$$y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) n = -10200 + 47n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

För positiva lösningar krävs både

$$x \geq 0 \Leftrightarrow 2400 - 11n \geq 0 \;\cdots \Leftrightarrow \ldots n \leq 218$$

och

$$y \geq 0 \Leftrightarrow -10200 + 47n \geq 0 \;\cdots \Leftrightarrow \ldots n \geq 218.$$

Så endast $n = 218$ ger en lösning där både $x \geq 0$ och $y \geq 0$, nämligen $x = 2$, $y = 46$.

2. (a) Först måste vi primtalsfaktorisera:

2	2520
2	1260
2	630
3	315
3	105
5	35
7	7
	1

Alltså:

$$\begin{aligned}
2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 &\Rightarrow \phi(2520) = \phi(2^3) \cdot \phi(3^2) \cdot \phi(5) \cdot \phi(7)\\
&= (2^3 - 2^2) \cdot (3^2 - 3^1) \cdot (5 - 1) \cdot (7 - 1) = 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 = 576.
\end{aligned}$$

(b) Vi ser från primtalsfaktoriseringen att SGD(11, 2520) = 1, så Eulers sats gäller och medför att

$$11^{576} \equiv 1 \pmod{2520}.$$

Således har vi att

$$11^{1151} = (11^{576})^2 \cdot 11^{-1} \equiv 11^{-1} \pmod{2520}.$$

Vi hittar inversen via Euklides algoritm. Redan efter första divisionen får vi att

$$2520 = 229 \cdot 11 + 1,$$

vilket medför att $229 \cdot 11 \equiv -1 \Rightarrow 11^{-1} \equiv -229 \equiv 2291 \pmod{2520}$.

3. BASFALL $n = 1$: VL $= 1/1 = 1$ och HL $= 1 + \ln 0 = 1 + 0 = 1$, så VL $\leq$ HL, v.s.v.

INDUKTIONSSTEGET: Antag att det för ett visst $n \geq 1$ gäller

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n. \tag{1}$$

Vi vill härleda att

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n+1). \tag{2}$$

VL av (1) kan delas upp enligt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \overset{(1)}{\leq} 1 + \ln n + \frac{1}{n+1}.$$

Så för att härleda (2) räcker det att visa att

$$\begin{aligned} 1 + \ln n + \frac{1}{n+1} &\leq 1 + \ln(n+1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} &\leq \ln(n+1) - \ln n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} &\leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Från tipset, med $x = 1/n$, vet vi att

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}.$$

För att bevisa (3) räcker det därför att bevisa att

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2n^2} &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2n^2} &\leq \frac{1}{n(n+1)} \\ \Leftrightarrow 2n^2 &\geq n(n+1) \\ \Leftrightarrow n^2 &\geq n \\ \Leftrightarrow n \geq 1, &\text{ vilket är ju sant.} \end{aligned}$$

4. (a) i. Till exempel:
$$a \to c \to e \to b \to h \to f \to d \to g \to a.$$

ii. Det finns i G_1 fyra noder av udda grad ($= 3$), nämligen a, d, e, h. Inga av dessa noder är hittills kopplade till varandra så det räcker att tillägga en kant mellan ett valfritt par av dem. Då kommer de resterande två noderna att ha udda grad och det kommer att finnas en Eulerväg dem emellan.
T.ex. om vi tillägger kanten $\{a, d\}$ så har vi följande Eulerväg mellan e och h:
$$e \to f \to d \to g \to a \to d \to c \to a \to b \to c \to e \to b \to h \to f \to g \to h.$$

(b) Precis som för G_1 så har G_2 åtta noder, varav 4 st har grad 4 och 4 st har grad 3. Men till skillnad från G_1 så finns det kopplingar mellan vissa noder av grad 3 i G_2, t.ex. kanten $\{s, y\}$. Därmed är G_1 och G_2 *inte* isomorfa.

5. (a) i. Vi har 6 möjliga vinnare för var och en av de 6 medaljerna så enligt MP finns det totalt 6^6 möjligheter för fördelningen.

ii. I varje gren har vi
- först 6 möjligheter för guld
- sedan 5 möjligheter för silver
- sedan 4 möjligheter för brons.

Så enligt MP finns det $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ möjligheter per gren. MP igen medför att det finns då $120 \cdot 120 = 14400$ möjligheter totalt.

iii. Det finns en 1-1 korrespondens mellan alla möjliga FFs och alla möjliga permutationer av de 6 länderna, alltså $6! = 720$ möjliga fördelningar.

(b) i. Döpa länderna till 1, 2, ..., 6 och låt x_i vara antalet medaljer som vanns av land i. Då söker vi helt enkelt antalet lösningar till
$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 6, \quad x_i \in \mathbb{N}. \tag{4}$$
Enligt formel är antalet lösningar $\binom{6+6-1}{6-1} = \binom{11}{5} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5!} = \cdots = 462$.

ii. Vi söker antalet lösningar till (4) där dessutom alla $x_i \leq 2$. M.a.o. varje x_i måste vara 0, 1 eller 2. Först har vi följande fyra alternativ:
Fall 1: Tre 2:or och tre nollor.
Fall 2: Två 2:or, två 1:or och två nollor.
Fall 2: En 2:a, fyra 1:or och en nolla.
Fall 4: Sex 1:or.

Fall 1: $\binom{6}{3} = 20$ val av de tre tvåorna.
Fall 2: $\binom{6}{2} = 15$ val av tvåorna, sedan $\binom{4}{2} = 6$ val av ettorna. Så $15 \cdot 6 = 90$ val totalt.
Fall 3: $\binom{6}{1} = 6$ val av tvåan, sedan $\binom{5}{4} = 5$ val av ettorna. Så $6 \cdot 5 = 30$ val totalt.
Fall 4: Bara 1 val.

Så enligt AP finns det totalt $20 + 90 + 30 + 1 = 141$ möjligheter.

6. (a) Ja. $A \backslash A = \phi$ alltid och $|\phi| = 0$, vilket är jämnt.

(b) Ja. Antag att $A \mathcal{R} B$, dvs att $|A \backslash B|$ är jämnt. Vi har

$$|A| = |A \backslash B| + |A \cap B| \tag{5}$$
$$|B| = |B \backslash A| + |A \cap B|. \tag{6}$$

Både $|A|$ och $|B|$ antas från början vara jämna. Då $|A \backslash B|$ är jämnt, medför (5) att $|A \cap B|$ också är det. Men då medför (6) att även $|B \backslash A|$ är jämnt, v.s.v.

(c) Nej. T.ex. tag $A = \{1, 2\}$ och $B = \{3, 4\}$. Då är $|A \backslash B| = |A| = 2$, jämnt och $|B \backslash A| = |B| = 2$, också jämnt. Så både $A \mathcal{R} B$ och $B \mathcal{R} A$ gäller, men $A \neq B$.

(d) Nej. T.ex. tag

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 3\}, \quad C = \{4, 5\}.$$

Då har vi att

$$\begin{aligned} A \backslash B = \{1, 4\} \Rightarrow |A \backslash B| = 2, \text{ jämnt} \Rightarrow A \mathcal{R} B, \\ \text{och } B \backslash C = \{2, 3\} \Rightarrow |B \backslash C| = 2, \text{ jämnt} \Rightarrow B \mathcal{R} C, \\ \text{men } A \backslash C = \{1, 2, 3\} \Rightarrow |A \backslash C| = 3, \text{ udda} \Rightarrow \neg(A \mathcal{R} C). \end{aligned}$$

7. (a) i. Ja.

$$y * x = 1 + y + x - yx = 1 + x + y - xy = x * y.$$

ii. Nej. Å ena sidan:

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (1 + x + y - xy) * z \\ &= 1 + (1 + x + y - xy) + z - z(1 + x + y - xy) \\ &= \cdots = 2 + (x + y) - (xy + xz + yz) + xyz. \end{aligned}$$

Å andra sidan:

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (1 + y + z - yz) \\ &= 1 + x + (1 + y + z - yz) - x(1 + y + z - yz) \\ &= \cdots = 2 + (y + z) - (xy + xz + yz) + xyz. \end{aligned}$$

Så $(x * y) * z \neq x * (y * z)$, förutom när $x = z$.

iii. Nej. Antag att ett element e uppfyller $x * e = x$. Detta medför att

$$1 + x + e - xe = x \Rightarrow e = \frac{1}{x - 1}.$$

M.a.o. e beror på x, så det finns ingen identitet, dvs inget e som skulle funka för alla x.

(b)

$$\begin{aligned} (-2 * x) * x &= (1 - 2 + x + 2x) * x = (3x - 1) * x \\ &= 1 + (3x - 1) + x - x(3x - 1) = \cdots = 5x - 3x^2. \end{aligned}$$

Så vi måste lösa $5x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(5 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 5/3$.