Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen på kursen TMV211: Inledande diskret matematik

Den 24 Oktober 2020 kl 14:00-18:00

Examinator: Jonathan Nilsson

Alla hjälpmedel är tillåtna, dock är ingen form av samarbete eller kommunikation tillåten. Denna tes har sju frågor. Maxpoäng är 60p. För godkänt krävs minst 30p (inklusive eventuella bonuspoäng). För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa. Skriv tydligt vad ditt svar är på varje uppgift. Lösningar som är oläsliga eller inte går att följa eller som innehåller endast svar bedöms som noll poäng. Börja varje uppgift på en ny sida. Du har en extra halvtimme på dig efter tentans slut till att skanna in och ladda upp dina lösningar. Inlämningen ska bestå av en enda Pdf-fil innehållande alla lösningarna i ordning. Det är ditt eget ansvar att se till att detta fungerar.

1. Hitta alla heltalslösningar till den diofantiska ekvationen $13x + 8y = 250$. Ange också de lösningar där både $x \geq 0$ och $y \geq 0$. [9p]

2. Hitta alla heltal x som löser följande ekvationssystem: [9p]

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 6 \mod 9. \end{cases}$$

3. Vi ska konstruera "ord" som kan formas av alla tolv bokstäverna i ordet [8p]

ERATOSTHENES

   (a) Hur många olika ord kan bildas av alla tolv bokstäverna?
   (Ett exempel på ett sådant ord är ESTNEEROSTAH)

   (b) Hur många av orden i (a) innehåller ordet RETHOSTA?
   (Ett exempel på ett sådant ord är NESRETHOSTAE)

   (c) Hur många av orden i (a) innehåller *inget* av orden STOR eller HETSA?

4. Använd induktion för att visa att för varje heltal $m \geq 1$ så gäller [8p]

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^k (2k+1) = 2m.$$

5. Vi definierar en relation $\sim$ på de naturliga talen $\mathbb{N}$ enligt $x \sim y \Leftrightarrow x^2 \geq y$. Då gäller exempelvis $3 \sim 5$ eftersom $3^2 \geq 5$. För var och en av utsagorna nedan, ange om den är sann eller falsk. Motivera svaren mycket kortfattat. Kvantorerna nedan refererar till universumet bestående av alla naturliga tal $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. [8p]

   (a) $\forall x : \forall y : x \sim y$

   (b) $\exists y : \forall x : x \sim y$

   (c) $\forall x : \exists y : x \not\sim y$

   (d) $\forall z : z^2 \sim z^3$

   (e) Relationen $\sim$ är reflexiv

   (f) Relationen $\sim$ är symmetrisk

   (g) Relationen $\sim$ är antisymmetrisk

   (h) Relationen $\sim$ är transitiv

6. Låt G vara grafen med nodmängd $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ och kantmängd [8p]
$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}\}$.
Kanterna saknar alltså riktning.

   (a) Rita grafen G så att inga kanter korsar varandra.
   (b) Hitta en Hamiltoncykel i G.
   (c) Hitta en Eulerväg i G.

7. Kom ihåg att mängden $\mathbb{R}^2$ består av alla ordnade par (x, y) av reella tal. Vi definierar en binär operation $\star$ på $\mathbb{R}^2$ enligt följande: [10p]

$$(a, b) \star (c, d) = (a + c, b \cdot d)$$

   (a) Är operationen $\star$ associativ? Är den kommutativ?
   (b) Finns det ett identitetselement? I så fall vilket?
   (c) Vilka element i $\mathbb{R}^2$ har inverser?
   (d) Hitta alla $X \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller $\big((2, 1) \star X\big) \star (3, 7) = (1, 5)$
   (e) Hitta alla $X \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller $X \star X = X$

Lycka till!