Chalmers tekniska högskola, Matematiska vetenskaper
Tentamen, TMV210 Inledande diskret matematik

Datum: 2020–08–28, tid: 14.00–18.00

Examinator:

Telefonvakt:

Hjälpmedel:

För betyget 3 (godkänt) krävs 20 poäng. För betyget 4 krävs 30 poäng och för betyget 5 krävs 40 poäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamensdagen. Resultatet meddelas . . .

OBS!

Använd inte samma sida till flera uppgifter (olika deluppgifter på samma sida går bra). Ange svar tydligt, förenkla svaret så långt som möjligt, och motivera dina svar väl. Förklara vad du gör, hur och varför. Det är i hög grad beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte bara svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ibland ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker. Tänk också på att inte fastna för länge i någon uppgift!

1. Är följande logiska formel en tautologi, en kontradiktion eller ingetdera? (4p)

$$\big(p \leftrightarrow (q \vee p)\big) \wedge \big((q \to p) \wedge (\neg p)\big)$$

2. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation, definierad på någon icke-tom mängd A, som är symmetrisk men inte reflexiv. Antag också att det för varje $x \in A$ finns ett $a \in A$ sådant att $x \,\mathcal{R}\, a$. Visa att $\mathcal{R}$ inte kan vara transitiv. (Tips: motsägelsebevis!) (5p)

3. Visa med induktion att $3 \,|\, n^3 + 2n$ för varje positivt heltal n. (4p)

4. Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en talföljd rekursivt definierad för alla heltal $n \geq 0$ genom $a_0 = 0$ och $a_n = a_{n-1} + 1$ för $n \geq 1$. Beräkna summan (4p)

$$\sum_{n=0}^{100} (2a_n + 3)\,.$$

5. Ange alla heltal x som uppfyller $100 < x < 200$ och följande kongruenssystem: (6p)

$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 9 \\ 3x \equiv 21 \mod 33 \end{cases}$$

6. (a) Hur många heltal x finns det som uppfyller $1 \leq x \leq 2160$ och är relativt prima med 2160? (2p)

(b) Ange ett heltal y som uppfyller $1 \leq y \leq 2160$ och (4p)

$$\frac{y-1}{6} \equiv \sum_{k=0}^{1154} 7^k \mod 2160\,.$$

Vänd!

7. Definiera en binär operator $*$ på den kartesiska produkten $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genom (6p)

$$(a, b) * (x, y) = (a + y, b + x)\,.$$

(a) Är operatorn $*$ kommutativ?

(b) Är operatorn $*$ associativ?

(c) Finns det något identitetselement för operatorn $*$?

8. Det finns 24 Tintinalbum med olika färger på ryggarna: elva album har röd rygg, sex orange, tre blå, tre grön och ett album har gul rygg. (6p)

(a) På hur många sätt kan man ställa de nio albumen som har orange eller grön rygg efter varandra i bokhyllan om man bara bryr sig om färgerna, inte titlarna? (Om man till exempel byter plats på två album med grön rygg så är det inget nytt "sätt".)

(b) Nick ska resa till sin sommarstuga och vill ta med sig fem olika Tintinalbum med fem olika färger på ryggarna. På hur många olika sätt kan han välja ut de fem albumen?

(c) Väl framme i sin sommarstuga packar Nick upp de fem albumen och ställer dem efter varandra i bokhyllan som han har där. På hur många olika sätt kan han göra detta?

9. Låt G_1, G_2, G_3 vara tre grafer *med vardera fyra noder*. Var och en av dem uppfyller ett motsvarande villkor som anges nedan, där V är grafens nodmängd och E är grafens kantmängd. (9p)

$$\begin{aligned} G_1 &: \quad \forall x \in V : \forall y \in V : \{x, y\} \in E \\ G_2 &: \quad \exists x \in V : \forall y \in V : \{x, y\} \in E \\ G_3 &: \quad \exists x \in V : \forall y \in V : \{x, y\} \notin E \end{aligned}$$

(a) För var och en av G_1, G_2, G_3, rita ett exempel på en sådan graf.

(b) Vilken av graferna är en fullständig graf? Vilken av dem kan *inte* vara en sammanhängande graf? Vilken av dem kan vara ett träd?

Lycka till!